Объем многогранника. Объем призмы

Определение. *Пусть на множестве многогранников задана функция, обладающая следующими свойствами:*

1. *$\forall M\ V(M)>0$ (положительная определенность);*
2. *Если $M=M_1 \cup M_2$, причем $int\ M_1 \cap int\ M_2=\emptyset$, то $V(M)=V(M_1)+V(M_2)$ (аддитивность);*
3. *Если $M_1=M_2$, то $V(M_1)=V(M_2)$ (инвариантность относительно движений);*
4. *$V(K)=1$, где К – куб с ребром длины 1 (нормированность).*

Объемом многогранника *называется значение этой функции для этого многогранника.*

Существование и единственность такой функции примем без доказательства.

Теорема 1. *Объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:* $\boxed{V = abc}$.

Доказательство: Случай 1: числа a, b и c рациональны. Тогда представим их в виде дробей (возможно, сократимых) с одинаковыми знаменателями: m/n, l/n и k/n. Разобьем параллелепипед на mlk кубов с ребром $1/n$ каждый. Из второй и третьей аксиом объема следует (проверьте!), что объем каждого равен $1/n^3$. Из второй же аксиомы получаем, что объем параллелепипеда $V = mlk \cdot 1/n^3 = abc$.

Случай 2: хотя бы одно из измерений выражается иррациональным числом. Если, например, a иррационально, то рассмотрим последовательность десятичных приближений: $a_1<a<a_1^*$, $a_2<a<a_2^*$, …, $a_n<a<a_n^*$,… . При необходимости поступим так же с b и c.

Параллелепипед с измерениями a, b и c содержит внутри себя параллелепипед с измерениями a_n , b_n и c_n и сам содержится в параллелепипеде с измерениями a_n^* , b_n^* и c_n^* . Как уже доказано (случай 1), объмы этих параллелепипедов равны соответственно $a_nb_nc_n$ и $a_n^*b_n^*c_n^*$. Из первой и второй аксиом объема $a_nb_nc_n < V < a_n^*b_n^*c_n^*$. По теореме о пределе произведения при $n\to\infty$ $a_nb_nc_n\to abc$ и $a_n^*b_n^*c_n^* \to abc$. По теореме о двух милиционерах $V = abc$.

Теорема 2. *Объем V прямой призмы равен произведению площади основания на высоту призмы:* $\boxed{V = Sh}$.

Для доказательства разобьем n-угольную призму на треугольные. Треугольную же можно достроить до прямоугольного параллелепипеда.

Теорема 3. *Объем V наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро:* $\boxed{V = S_{\perp}b}$.

Следствие. *Объем V наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту призмы:* $\boxed{V = Sh}$.

Задачи.

21. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с прямым углом C, $BC = 4$, $BB_1 = 3$. Угол между диагоналями граней AC_1 и CB_1 равен $\arccos 3\sqrt{2}/10$. Найдите объем призмы.
22. а) Найдите объем параллелепипеда, одна из боковых граней которого имеет площадь Q и удалена от параллельной грани на расстояние a.
    б) Найдите объем параллелепипеда, одно из диагональных сечений которого имеет площадь Q и удалено от бокового ребра на расстояние a.
23. Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.
24. Каждая грань параллелепипеда – ромб с диагоналями в 6 и 8. Все плоские углы одного из трехгранных углов параллелепипеда острые. Найдите объем параллелепипеда.
25. Площадь боковой поверхности призмы равна S, радиус вписанной в перпендикулярное сечение окружности равен r. Найдите объем призмы.
26. Боковое ребро параллелепипеда равно d, площади содержащих его граней – S_1 и S_2. Какое наибольшее значение может принимать его объем?

27. Через боковые ребра треугольной призмы проведены плоскости, каждая их которых делит ее на равновеликие части. Обязательно ли они пересекаются по прямой?

Домашнее задание.

28. Основанием прямой призмы является трапеция, площадь которой равна 126 см^2. Зная, что площади параллельных боковых граней равны 45 см^2 и 270 см^2, а площади диагональных сечений равны 195 см^2 и 3 дм^2, вычислите объем призмы.
29. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB = 5, BC = 12. Через диагональ параллелепипеда B_1D параллельно диагонали основания AC проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.
30. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно a, одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы в 60°. Найдите объем призмы.
31. Объем четырехугольной призмы равен V. Диагональные сечения взаимно перпендикулярны, их площади равны S_1 и S_2. Найдите величину бокового ребра призмы.
32. Все ребра параллелепипеда равны a. Найдите его объем, зная, что плоские углы одного трехгранного угла равны 45°, 60°и 90°.
33. Боковая поверхность треугольной призмы равна 8 м^2, боковое ребро равно 5 дм, расстояния между боковыми ребрами относятся как 16 : 25 : 39. Найдите объем призмы.

Гимназия №1543. 11-В класс. Геометрия-3. 22.09 2011г.

Объем пирамиды.

Теорема *Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:* $\boxed{V = 1/3\ Sh}$.

34. Объем правильной треугольной пирамиды равен 1/6 куба бокового ребра. Определите плоский угол при вершине пирамиды.
35. Докажите формулу для вычисления объема тетраэдра $\boxed{V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi}$, где a и b – длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, d – расстояние, а φ - угол между ними.
36. Докажите, что объем тетраэдра равен $\boxed{1/6\ AB\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\beta\sin\gamma\sin D}$, где β и γ – плоские углы при вершине A, противолежащие ребрам AB и AC, а D – двугранный угол при ребре AD.
37. Боковые ребра треугольной пирамиды равны между собой. Объем пирамиды в 12 раз меньше произведения сторон основания. Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.
38. В основании пирамиды PABCD расположен четырехугольник ABCD, в котором AB = BC = 6, $\angle ABC$ равен 60°, $\angle BCD = \angle DAC$ и равен 30°. Каждая боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.
39. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребрах AA_1, BB_1, DD_1 взяты соответственно точки K, P, M так, что $AK : A_1K = 1 : 3$, $BP : B_1P = 3 : 1$, $DM : D_1M = 3 : 1$. Найдите объем пирамиды, у которой основание – сечение куба плоскостью KPM, а вершина – точка A_1. *Указание*: Используйте теорему о площади ортогональной проекции, заменив угол между плоскостями углом между перпендикулярами.
40. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а а) $\cos\alpha = ¼$, где α – плоский угол при вершине пирамиды; б) $\mathrm{tg}\beta = 2$, где β – двугранный угол при основании; в) $\mathrm{tg}\gamma = 1$, где γ – угол наклона бокового ребра к плоскости основания; г) $\cos\delta = 1/5$, где δ – двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

Домашнее задание

41. Площади двух граней тетраэдра равны S_1 и S_2, a – длина их общего ребра, α - двугранный угол между ними. Докажите, что объем тетраэдра $V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

42. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. Площадь грани SAB равна Q, а расстояние от вершины C до плоскости этой грани равно h. Найдите объем пирамиды.

43. Внутри призмы объема V взята точка O. Найдите сумму объемов пирамид с вершиной O, основаниями которой служат боковые грани призмы.

44. В основании пирамиды SABC лежит треугольник, у которого AB = BC = 20, AC = 32. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

45. Основание пирамиды SABC – треугольник ABC, в котором AC=BC=a, AB=b. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите ее объем.

46. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V. Найдите объем общей части тетраэдров AB_1CD_1 и A_1BC_1D.

47. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром b, если а) $\cos\alpha = 1/3$, где α – плоский угол при вершине пирамиды; б) $\mathrm{tg}\beta = 1{,}5$, где β – двугранный угол при основании; в) $\cos\gamma = 0{,}6$, где γ – угол наклона бокового ребра к плоскости основания; г) $\sin\delta = 5/13$, где δ – двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

Формула Симпсона.

48. В основании пирамиды лежит трапеция. Через вершину пирамиды и среднюю линию основания проведено сечение. Докажите, что объем пирамиды равен 4/3 произведения площади сечения на расстояние от плоскости сечения до стороны основания пирамиды.

Определение. *Пусть в двух параллельных плоскостях взяты два произвольных выпуклых многоугольника. Наименьшее выпуклое тело, их содержащее, называется* ***призматоидом****.*

49. Докажите, что призматоид является многогранником. Будем называть выбранные изначально параллельные многоугольники его основаниями, а остальные грани – боковыми. Какими многоугольниками могут быть боковые грани?

50. Докажите *формулу Симпсона для вычисления объема призматоида*: $V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3)$, где h – высота призматоида, S_1 и S_2 – площади его оснований, S_3 – площадь его сечения плоскостью, параллельной плоскостям оснований и равноудаленной от них.

Указание: Отметьте на среднем сечении произвольную точку, соедините ее со всеми вершинами и сложите объемы полученных пирамид.

51. Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам и равноудаленной от них, имеет площадь S. Расстояние между этими ребрами равно h. Найдите объем тетраэдра.

Объем усеченной пирамиды.

52. Докажите *формулу объема усеченной пирамиды* $\boxed{V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)}$, где S_1 и S_2 – площади оснований, а h - высота.

53. Найдите объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований равны 4 и 9, а боковое ребро – 35.

54. Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны ее основания равны a и b, а диагональ образует с плоскостью основания угол в 30°.

55. Высота усеченной пирамиды равна h, площадь среднего сечения – S. В каких пределах может меняться объем этой пирамиды?

Отношение объемов

Свойство 1. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, пересекающую основание, делит объем пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

Свойство 2. Плоскость, проходящая через ребро тетраэдра и точку на скрещивающемся ребре, делит объем тетраэдра в том же отношении, в котором точка делит длину ребра.

Свойство 3. Пусть дан тетраэдр SABC. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых SA, SB и SC, причем $SA_1=\alpha SA$, $SB_1 = \beta SB$, $SC_1 = \gamma SC$. Тогда отношение объемов тетраэдров $SA_1B_1C_1$ и SABC равно $\alpha\beta\gamma$.

56. На ребре DC треугольной пирамиды DABC взята точка N, причем CN=2DN. На продолжении ребра CA за точку A и на продолжении ребра CB за точку B расположены точки K и M соответственно, причем AC = 2AK и BM = 2BC. В каком отношении плоскость MNK делит объем пирамиды?
57. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. Точка N – середина ребра AB. Точка K делит ребро SC в отношении SK : KC = 2:1. В каком отношении плоскость DNK делит объем пирамиды SABCD?
58. Основание четырехугольной пирамиды SABCD – параллелограмм ABCD. Точка N – середина ребра AS, точка K – середина медианы SP треугольника BSC, точка M расположена на ребре SB, причем SM = 5 MB. В каком отношении плоскость MNK делит объем пирамиды?
59. На ребрах BC и DC треугольной пирамиды ABCD расположены точки N и K соответственно, причем CN = 2 BN и DK : KC = 3 : 2; M – точка пересечения медиан треугольника ABD. В каком отношении плоскость MNK делит объем пирамиды ABCD?
60. (бонус) Объем тетраэдра ABCD равен V. Точки K, M, P и T таковы, что $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DT}=\overrightarrow{CD}$. Найдите объем тетраэдра KMPT.
61. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. Через середину ребра SA проведена плоскость, параллельная грани SBC. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
62. Две плоскости, параллельные противоположным ребрам тетраэдра AB и CD, делят ребро BC на три равные части. Какая часть объема тетраэдра заключена между этими плоскостями?
63. На продолжении ребер AB, AA_1 и AD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за точки B, A_1 и D отложены отрезки BP=3/2AB, A_1Q=3/2AA_1 и DR= 3/2AD. В каком отношении плоскость PQR делит объем параллелепипеда?
64. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD, длины оснований которой связаны соотношением AD = 2BC. Через вершину A и середины ребер SB и SC проведено сечение. В каком отношении оно делит объем пирамиды?
65. (бонус) Основание пирамиды SABCD – параллелограмм ABCD. На ребрах AB и SC расположены точки K и M соответственно, причем AK : KB = CM : MS = 1 : 2. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K и M параллельно прямой BD, делит объем пирамиды SABCD?
66. На трех параллельных прямых взяты сонаправленные векторы $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Докажите, что объем выпуклого многогранника $ABCA_1B_1C_1$ равен $S\cdot(AA_1+BB_1+CC_1)/3$, где S – площадь треугольника получающегося при пересечении этих прямых перпендикулярной им плоскостью.
67. В прямоугольнике ABCD AB = 2, BC = 3. Отрезок KM=5 параллелен AB и расположен на расстоянии 1 от плоскости ABC. Найдите объем многогранника ABCDKM.
68. Основанием четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является трапеция ABCD с отношением оснований AD : BC = 2 : 1. Точка M делит боковое ребро AA_1 в отношении

$AM : MA_1 = 2 : 1$, точка N – середина ребра CC_1. Постройте сечение призмы, проходящее через точки M и N и параллельное прямой AB. Определите, в каком отношении он делит объем призмы.

69. (бонус) Докажите, что из боковых граней четырехугольной пирамиды, основание которой является параллелограммом, можно составить треугольную пирамиду, причем ее объем вдвое меньше объема исходной пирамиды.

Домашнее задание.

70. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. На ребре SA взята точка M так, что SM= 2AM. Через M и середины ребер SB и SD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
71. В каком отношении делит объем тетраэдра ABCD плоскость MNK, где M – середина медианы AP грани ABD, точка N делит ребро DC в отношении DN : NC = 1 : 3, точка K делит ребро AC в отношении AK : KC = 2 : 1?
72. Дан тетраэдр ABCD. Точка Y делит ребро DB в отношении DY : YB = 1 : 3, точка E делит ребро BC в отношении BE : EC = 1 : 2. Точка S – середина медианы AM грани ACD. Определите, в каком отношении объем тетраэдра делится плоскостью YES.
73. а) Какую часть объема параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляет объем тетраэдра A_1BC_1D?
    б) На диагоналях граней AB_1, AC и AD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен новый параллелепипед. Найдите отношение объемов нового и старого параллелепипедов.
74. Вершины тетраэдра лежат в центрах тяжести граней другого тетраэдра. Определите отношение их объемов.
75. Плоскости ABC_1 и A_1B_1C делят треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на четыре части. Найдите отношение объемов этих частей.
76. K и M – середины ребер соответственно AC и BD тетраэдра ABCD. а) Найдите отношение объемов тетраэдров KDMC и ABCD; б) Докажите, что любая плоскость, содержащая KM, делит ребра AD и BC в одинаковых отношениях; в) Докажите, что такая плоскость делит объем тетраэдра ABCD пополам.
77. Дан правильный шестиугольник ABCDEF со стороной, равной a. Отрезок MN параллелен одной из сторон шестиугольника, равен его стороне и расположен на расстоянии, равном h, от его плоскости. Найдите объем многогранника ABCDEFMN.
78. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через одну из его вершин и центры двух граней, не содержащих этой вершины?
79. Основание пирамиды SABCD – параллелограмм ABCD, точки Mи N – середины ребер SC и SD соответственно. Прямые SA, BM и CN попарно перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если SA = a, BM = b, CN = c.