Алгебра, 8 "В", 27 марта, самостоятельная работа.

1) Докажите, что для $x > 0$ верно $\sqrt{x^2+x} - x < \frac{1}{2}$.

2) Докажите, что если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то $\dfrac{x}{1+y} + \dfrac{y}{1+x} \leqslant 1$.

3) Докажите для a, $b \geqslant 0$ неравенство: $(18+a)(2+b)(1+ab) \geqslant 48ab$. Обращается ли оно в равенство?

4) Положительные числа a и b не превосходят единицы, но $a + b \geqslant \frac{1}{2}$. Какое максимальное значение может принимать число $(1-a)(1-b)$?

5) Докажите для x, $y \geqslant 0$ неравенство: $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \geqslant 2$. Обращается ли оно в равенство?

6) Про положительные числа a, b и c известно, что $abc = 1$.

а) Докажите, что $\dfrac{1}{a^3+b^3+1} + \dfrac{1}{b^3+c^3+1} + \dfrac{1}{c^3+a^3+1} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

б)* Докажите, что $\dfrac{1}{a^3+b^3+1} + \dfrac{1}{b^3+c^3+1} + \dfrac{1}{c^3+a^3+1} \leqslant 1$.

Алгебра, 8 "В", 27 марта, домашняя самостоятельная работа. Задачи на доказательство неравенств часто дают на олимпиадах. На этой неделе — подборка с Московской областной олимпиады разных лет.

1) **(МО, II тур, 1994 г, 9 класс, 9.1)** Докажите неравенство $(6x+1)(x-1) > (2x+1)(x-3)$.

2) **(МО, II тур, 1998 г, 9 класс, 9.2)** Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, гипотенуза c. Докажите неравенство $a^4 + a^2b^2 + b^4 \geqslant \frac{3}{4}c^4$.

3) **(МО, III тур, 1994 г, 10 класс, второй день, 10.1)** Докажите неравенство $a^3(b+1) + b^3(a+1) \geqslant a^2(b+b^2) + b^2(a+a^2)$ для a, $b \geqslant 0$.

4) **(МО, II тур, 1995 г, 9 класс, 9.4)** Числа a, b и c неотрицательны и $a+b+c \leqslant \frac{1}{2}$. Докажите, что $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant \frac{1}{2}$. Возможно ли равенство?

5) **(МО, III тур, 1995 г, 8 класс, второй день, 8.2)** Докажите неравенство $2x^4 + 2y^4 \geqslant xy(x+y)^2$.

6) **(МО, III тур, 1994 г, 11 класс, первый день, 11.1)** Известно, что $a > b > c > 0$. Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} < \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$.

7) **(МО, II тур, 2001 г, 9 класс, 9.2)** Для положительных чисел докажите неравенство $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} \geqslant 4(x-z)$. (Подсказка. Докажите сначала, что $\dfrac{x^2}{y} \geqslant 4(x-y)$.)