

# Спецкурс. Листок 1

8 "В" класс

3 сентября 2011 г.

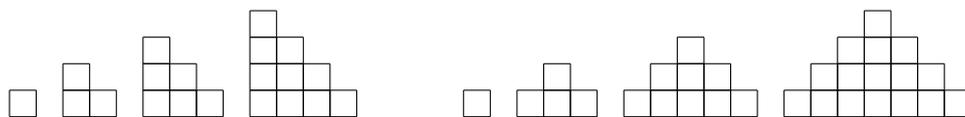
1. Придумайте геометрическое доказательство формул:

(a)  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(b)  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(c)  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(d)  $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 =$



Назовем  $n$ -тым треугольным числом  $T_n$  количество клеток в ступенчатом треугольнике (рис. 1).

2. Выпишите

$$T_1 + T_2, T_2 + T_3, T_3 + T_4, \dots$$

Какая последовательность получилась? Объясните получившийся результат геометрически.

3. Докажите формулу Диофанта:

$$8T_n + 1 = (2n + 1)^2$$

4.  $T_{n+m} = T_n + T_m + n \cdot m$

5. Рассмотрим "симметрические" треугольники (рис. 2). Выпишите площади этих треугольников в виде ряда. Объясните геометрически получившийся результат.

6. Какая сумма соответствует способу разрезания "симметрического" треугольника на горизонтальные слои?

7. Придумайте формулу для вычисления суммы нечетных чисел через одно:

$$1 + 5 + 9 + 13 + \dots =$$

8.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 =$

*Указание: разрезать "таблицу умножения".*

9. Найдите пятисотое натуральное число, дающее при делении на 3 остаток 1.

10. Кусок бумаги рвут на 4 части. Некоторые из получившихся частей снова рвут на 4 части и так далее. Может ли получиться 1998 кусков?

11. Два рыбака неделю были на рыбалке. Первый каждый день вылавливал одну рыбу, второй ловил каждый день вдвое больше рыб, чем они вместе накануне. В первый день они поймали на двоих всего одну рыбу. Сколько рыб они поймали в последний день рыбалки?

*В следующих задачах попытайтесь угадать ответ, выписав сумму для двух, трех, четырех слагаемых.*

12.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} =$

13.  $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots =$

14.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} =$

15.  $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^n} =$

16.  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! =$

17.  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{(n-1)}{n!} =$

18.  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n =$

19.  $1 + 3 + 9 + \dots + 3^n =$