Математическая индукция-1
8 класс "В"
5 октября 2011 г.

1. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на "уголки"из трёх клеток. Придумайте обобщение этой задачи.

   Принцип математической индукции. *Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, A_3, \ldots$, причем выполнены условия:*

   (a) утверждение A_1 верно;

   (b) при любом натуральном n, если верно утверждение A_n, то верно и утверждение A_{n+1}.

   Тогда все утверждения $A_1, A_2, A_3, \ldots$ верны.

2. (Игра "Ханойская башня") Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней за $2^n - 1$ перекладываний.

3. Вадик нарисовал на плоскости треугольник. Таня провела n прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

4. В Математической стране 100 городов. Любые два города соединены напрямую либо автодорогой, либо подземной дорогой. Докажите, что или из любого города в любой можно проехать на автомобиле, или из любого города в любой можно добраться на метро.

5. (Старинная задача) У Васи есть очень много трех- и пятикопеечных монет. Какую сумму он может ими заплатить? (найдите все варианты и докажите, что других нет)

6. Про число x известно, что $x + 1/x$ — целое. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ — целое.

7. Докажите, что при любом натуральном n число $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

8. $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$.

   Докажите равенства:

9. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

10. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots n^3 = (1 + 2 + 3 \dots + n)^2$.

11. Докажите неравенство Бернулли: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, при $x \geq -1$.

12. В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

13. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?

14. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость n окружностей.

15. Плоскость разбита на куски n прямыми. Докажите, что эти куски можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждый кусок был покрашен одной краской, а любые два куска, имеющие общий участок границы, были покрашены разными красками.

16. Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Игроки ходят по очереди, причем по правилам игра продолжается не более n ходов. Ничьих не бывает. Докажите, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

17. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ такова, что $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ при $n > 2$. Найдите a_n.