Математическая индукция-2
8 класс "В"
15 октября 2011 г.

1. Докажите, что все числа 1007, 10017, 100117, 1001117,... делятся на 53.

2. Докажите, что число 111...111 (3^n единиц) делится на 3^n, но не делится на 3^{n+1}.

3. а) Докажите, что квадрат можно разрезать на любое, большее пяти, число квадратов (не обязательно одинаковых).

   б) Докажите, что равносторонний треугольник можно разрезать на любое, большее пяти, число равносторонних треугольников (не обязательно одинаковых).

4. Рассмотрим все обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем (1/2, 1/3, 1/4, ...). Докажите, что для любого $n > 2$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей такого вида.

5. В правильном n-угольнике вершины раскрашены в 3 цвета. При этом оказалось, что соседние вершины покрашены в разные цвета и все цвета использованы. Докажите что его можно разрезать диагоналями на треугольники, так что у каждого треугольника вершины покрашены в разные цвета.

6. В трех бочках содержится в сумме 128 литров воды, причем в каждой целое число литров. Разрешается выбрать две бочки и перелить из одной в другую столько воды, сколько там уже есть. Докажите, что можно собрать всю воду в одной бочке (бочки достаточно большие).

7.* Восьмого марта каждая из n учительниц пришла в школу с букетом из одного цветка. При этом оказалось, что все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все или часть имеющихся у нее цветов. Нельзя дарить букет, если букет, состоящий из точно тех же цветов, в этот день уже кому-то дарили. Какое наибольшее количество букетов могло быть подарено?

8.* На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из этих машин может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

9. Найдите ошибки в следующих доказательствах по индукции.

   а) Докажем, что $n > n + 1$.

   Действительно: пусть это утверждение верно для n, то есть $n > n+1$. Прибавив к обеим частям равенства единицу, мы получаем, что $n+1 > (n+1)+1$, то есть верно утверждение для $n+1$.

   б) Докажем, что в произвольном стаде из n коров все коровы одного цвета.

   База. В любом стаде из одной коровы все коровы, очевидно, одного цвета.

   Шаг индукции. Предположим, что в любом стаде из k коров все коровы одного цвета. Докажем, что в любом стаде из $k+1$ коровы все коровы одного цвета.

   Рассмотрим произвольное стадо из $k+1$ коровы. Возьмем в нем произвольную корову A. Оставшиеся k коров одного цвета. Теперь возьмем другую корову B. Оставшиеся k коров также одного цвета. В частности, A одного цвета со всеми коровами, кроме A и B, и B одного (того же!) цвета со всеми коровами, кроме A и B.

   Значит, A, B и вообще все коровы в стаде одного цвета.

   в) В стране несколько городов соединенных дорогами, так из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажем, что из любого города можно проехать в любой другой.

   База. Если городов 2, то по условию они должны быть связаны между собой.

   Шаг индукции. Пусть для n городов все доказано. Добавим $n+1$-й город. По условию из этого города ведет дорога в один из старых n городов. Следовательно, до него можно доехать в один из старых городов, а оттуда уже добраться до любого другого.