Делимость

8 класс "В"

16 ноября 2011 г.

Общим делителем *чисел a и b называется целое число, на которое делятся оба эти числа. Наибольшее из всех делителей чисел a и b называется* **наибольшим общим делителем чисел a и b.** *Обозначение: (a, b).*

1. Докажите, что $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$, где r — остаток от деления a на b.

2. Найдите все возможные значения

a) $(n, 12)$;

b) $(n, n + 1)$;

c) $(n, n + 6)$

d) $(2n + 3, 7n + 6)$;

e) $(n^2, n + 1)$.

Алгоритм Евклида

Если необходимо найти наибольший общий делитель чисел a и b ($a > b$), то можно свести задачу к поиску $(a - b, b)$, ибо $(a, b) = (a - b, b)$, выберем бо́льшее из чисел $a - b$ и b и уменьшим его на меньшее, наибольший общий делитель, новой пары чисел будет, по-прежнему равен $(a - b, b)$, будем и дальше постепенно уменьшать наши числа, пока не получим пару равных чисел (d, d). Число $d = (a, b)$.

На практике a заменяют не на $a - b$, а на r — остаток от деления a на b, что несколько упрощает вычисления. И алгоритм Евклида приобретает вид:

$a = bq_1 + r_1,$	$0 < r_1 < b,$	(делим a на b с остатком)
$b = r_1q_2 + r_2,$	$0 < r_2 < r_1,$	(делим b на r_1 с остатком)
$r_1 = r_2q_3 + r_3,$	$0 < r_3 < r_2,$	(делим r_1 на r_2 с остатком)
$\quad = \quad + \quad ,$	$0 < \quad < \quad ,$	(делим на с остатком)
………………	………………	………………
$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,$	$0 < r_n < r_{n-1},$	(делим r_{n-2} на r_{n-1} с остатком)
$r_{n-1} = r_nq_{n+1},$	$0 <$	(если r_{n-1} разделилось нацело на r_n)

3. Объясните, почему $d = (a, b)$?

4. Найдите с помощью алгоритма Евклида $(525, 231)$.

Обратный алгоритм Евклида

Из алгоритма Евклида следует, что $d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$, *но* $r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1}r_{n-2}$, *а* r_{n-2} *выражается через* r_{n-3} *и* r_{n-4} *и так далее. Значит существуют целые числа* x *и* y *такие, что* $d = xa + yb$.

5. Найдите x и y такие, что $(525, 231) = x \cdot 525 + y \cdot 231$

6. Кузнечик умеет прыгать вдоль прямой на 6 см и 10 см. Сможет ли он попасть в точку отстоящую от исходной на

a) 7 см?

b) 14 см?

c) Опишите как расположены все точки в которые он попасть сможет.

7.

a) Заданы числа a и b. Изобразите на числовой прямой все числа, которые можно представить в виде $ax + by$, подставляя в это выражение все возможные пары чисел x и y.

b) Докажите, что (a, b) — наименьшее положительное число, которое можно представить в виде $ax + by$.

8. Даны числа a и b, докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение относительно переменных x и y тогда и только тогда, $(a, b) \vdots c$.

Общим кратным *ненулевых чисел* a *и* b *называется всякое число делящееся на оба эти числа. Наименьшее положительное общее кратное чисел* a *и* b *называется* **наименьшим общим кратным** *этих чисел. Обозначается:* $[a, b]$.

9. Докажите, что

a) $[ca, cb] = c[a, b]$

b) $\left(\frac{[a,b]}{a}, \frac{[a,b]}{b}\right) = 1$.

10. Докажите, что любое общее кратное чисел a и b делится на $[a, b]$.

11.

a) $(a, b) \cdot [a, b] = ab$

b) $\frac{[a,b,c]}{(a,b,c)} \cdot (a, b) \cdot (b, c) \cdot (a, c) = abc$

12. Найдите $[192, 270]$