Делимость

8 класс "В"

23 ноября 2011 г.

Число p называется **простым***, если его нельзя представить в виде произведения двух чисел, ни одно из которых не равно единице.*
Основная теорема арифметики *утверждает, что*

> *Всякое целое положительное число, кроме единицы, может быть представлено в виде произведения простых сомножителей и притом единственным способом, с точностью до порядка множителей.*

Вы, конечно, уже встречались с основной теоремой арифметики и даже очень часто использовали ее в доказательствах, подчас не задумываясь о том, откуда она взялась и всегда ли она верна.
Попробуем построить пример в котором основная теорема арифметики окажется неверной. Забудем ненадолго о существовании нечетных чисел и станем считать, что есть одни только четные числа. С одними четными числами можно проделывать все те же арифметические операции, что и со всеми целыми числами, ведь сумма и произведение двух четных чисел — четное число, и нам нет необходимости вспоминать о нечетных (деление, конечно, определено не всегда, но и для всех целых деление нацело не всегда осуществимо). В арифметике четных чисел нельзя, к примеру, разделить без остатка 6 на 2, т.к. получится 3, число не входящее в нашу арифметику. По тем же причинам 6 является простым числом.
Теперь мы все знаем для того, чтобы придумать пример, "опровергающий" основную теорему арифметики, вот он:

$$10 \cdot 6 = 60 = 30 \cdot 2$$

Число 60 разлагается в произведение простых двумя различными способами.

1.

а) Проверьте, что 2, 6, 10 и 30 являются простыми числами в арифметике четных чисел.

b) Придумайте свой пример, "опровергающий" основную теорему арифметики.

Доказательство основной теоремы арифметики

Основная теорема арифметики верна в арифметике всех целых чисел, но как и любая теорема, нуждается в доказательстве. Для ее доказательства необходимы две вспомогательные леммы.

Определение. Числа a и b называются **взаимно простыми**, если $(a, b) = 1$.

Лемма 1. Если a и b взаимно просты, то существуют целые x и y такие, что $ax + by = 1$

Лемма 2. Если $(a, b) = 1$ и $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.

Лемма 3. Если p — простое число, то любое целое число n либо делится на p, либо взаимно просто с ним.

2. Завершите доказательство теоремы.

3. Почему приведенное доказательство не проходит в арифметике четных чисел?

4. Докажите бесконечность множества простых чисел.

5. Докажите, что для любого n, не делящегося на 2 и 3, число $n^2 - 25$ делится на 24.

6. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, ...,при делении на 10 — остаток 9.

7. Докажите, что два соседних числа Фибоначчи — взаимно просты (числа Фибоначчи определяются условиями $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n \geq 3$).

8. При каких k число $(k - 1)!$ делится на k?

9. Докажите, что уравнение $x^2 = ny^2$ не имеет натуральных решений, если n — не квадрат натурального числа.

10. Решите диофантовы уравнения:

a) $3x - 4y = 29$;

b) $11x + 12y = 58$;

c) $153x - 34y = 51$;

d) $153x - 34y = 52$.