

**Теория множеств**  
**8 класс "В"**  
**21 декабря 2011 г.**

*Если число элементов в множестве  $A$  конечно, его обозначают  $|A|$ .*

1. Сколько чисел от 1 до 1000 делится на 2 или на 3?
2. Сколько существует целых чисел от 1 до 16 500, которые
  - a) не делятся на 5;
  - b) не делятся ни на 3, ни на 5;
  - c) не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11;
  - d) не делятся ни на 3 ни на 5, но делятся на 11.
3. Докажите, что
  - a)  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ;
  - b)  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ .
4. Выведите аналогичную формулу для объединения  $n$  множеств (она называется **формулой включений и исключений**).
5. Объединение четырех множеств, каждое из которых состоит из 40 элементов, содержит не более 100 элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух из этих множеств состоит, по крайней мере, из 10 элементов.
6. В школе работают драмкружок, кружок по фото и кружок по рисованию. На каждый из них ходит по 20 школьников, причем 10 школьников ходит на какие-то два кружка, а Лида на все три. Сколько всего школьников ходит на кружки?
7. В комнате площадью  $6 \text{ м}^2$  постелили три ковра произвольной формы площадью  $3 \text{ м}^2$  каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей  $1 \text{ м}^2$ .
8. В квадрате площадью 5 расположены 9 многоугольников с площадью 1 каждый. Доказать, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше  $1/9$ .
9. Группа туристов выехала в заграничное путешествие. Из них владеют английским языком 28 человек, французским — 13, немецким — 10, английским и французским — 8, английским и немецким — 6, французским и немецким — 5, всеми тремя языками — 2, а 41 человек не владеет ни одним из трех языков. Сколько туристов в группе?

- 10.** Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку "5" получили по математике — 48 человек, по физике — 37, по русскому языку — 42, по математике и физике — 24, по физике и русскому — 26, по математике и русскому — 31, по всем трем предметам — 4. Сколько абитуриентов получили одну оценку "5"? Сколько получили две оценки "5"?
- 11.** В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак "+". Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем перед каждой пятой, а затем перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.
- 12.** Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета - черный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были черными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?
- 13.** Известно, что  $|A| = 58$ . Каких подмножеств больше у множества  $A$ : 15-элементных или 43-элементных.
- 14.** Докажите, что последовательностей длины  $n$  из нулей и единиц столько же, сколько подмножеств у множества  $\{1, \dots, n\}$ .
- 15.** Пусть  $U$  — непустое конечное множество. Каких подмножеств у  $U$  больше: с четным или нечетным числом элементов?