

Показательные и степенно-показательные уравнения

1. Решите степенно-показательное уравнение:

а) $(x - 3)^{\frac{x+1}{4}} = \sqrt[3]{(x - 3)^{x-2}}$; б) $|x - 3|^{3x^2-10x+3} = 1$;

в) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$; г) $|\cos x|^{\sin^2 x - 1,5 \sin x + 0,5} = 1$.

2. Решите уравнение: а) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$; б) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$

3. Найдите все значения p , при которых уравнение $(p - 1) \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + (p + 2) = 0$ имеет хотя бы одно решение.

4. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2 \cdot 4^x + 1}{2^x + 2} - 4^x = \frac{y}{2^{x+1} + 4} \\ 4 \cdot 2^{3x} + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

Показательные и степенно - показательные неравенства

$$(f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) > 0 \end{cases}$$

5. Решите неравенство: а) $(x^2 - x + 1)^x < 1$; б) $(x^2 - 4x + 4)^{x^2-x-6} \geq 1$.

6. Решите неравенство:

а) $4\sqrt{9-x^2+1} + 2 < 9 \cdot 2\sqrt{9-x^2}$; в) $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$;

б) $\frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$; г) $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} \leq 1$.

Экстремальные задачи

7. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход идет по дороге со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход может добраться от базы до станции?

8. Из прямоугольной трапеции с основаниями 6 и 8 и высотой 10 вырезают прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь?

9. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен стать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

Логарифмы на сладкое

10. Вычислите: а) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$;

б) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.