Логарифм и его свойства

1. Сравните: а) $\log_3 \frac{1}{5}$ и $\log_3 \frac{1}{6}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 6$.
2. Постройте график функции: а) $y = \log_2 x^2$; б) $y = \log_2 x^3$.
3. Решите уравнения:
   а) $4^{1+\lg x} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{2+\lg x^2} = 0$; б) $(2 \cdot 3^x + 5^x) \cdot (3^{x+1} + 2 \cdot 5^x) = 15^{x+1}$.
4. Решите уравнение: а) $\lg x = \frac{2}{3} \lg 24 - 2 + 1\frac{1}{3} \lg 3$; б) $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{11}{12}$.
5. Решите уравнения: а) $7^{x+3} \cdot 3^{\frac{x+3}{x+2}} = 1$; б) $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$.
6. Докажите формулу $\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

   Следствие 1 (формула перехода к другому основанию). $\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

   Следствие 2. $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.
7. Пользуясь формулой перехода, вычислите логарифмы: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.
8. Вычислите: а) $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}}$; б) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$.

   Формула "обмена этажами". $\boxed{b^{\log_a c} = c^{\log_a b}}$
9. а) Вычислите $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; б) Вычислите еще раз $9^{\log_3 5}$.
10. Вычислите:
    а) $5^{\frac{2\log_4 5+1}{2\log_4 5}}$; в) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 16 \cdot \log_2 3)$;
    б) $(3\sqrt{3})^{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (2\sqrt[3]{2})}$; г) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$; д) $10^{\frac{\log_2 3 \cdot \log_5 3}{\log_2 3 + \log_5 3}}$.
11. Пусть $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.
12. Пусть $\ln 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\ln 56$.
13. Пусть $\log_2 3 = a$, $\log_5 3 = b$, $\log_7 3 = c$. Выразите $\log_{140} 9$ через a, b и c.
14. Сравните: а) $\log_5 \sqrt{2}$ и $\log_{25} 3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; в) $\log_3 10 + 4\lg 3$ и 4.
15. а) Докажите, что при $a > 1$ выполняется неравенство $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$.
    б) Сравните $\log_{17} 19$ и $\log_{19} 20$.
16. Вычислите: а) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$;
    б) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

Домашнее задание

17. Решите уравнение $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.
18. Вычислите:
    а) $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$; г) $\frac{\log_7 5 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 4 + 2\log_4 2}{2(2\log_3 2 + 3\log_{343} 7)}$;
    б) $\frac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 - \log_5 0,5}$; д) $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$;
    в) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; е) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} (\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ)$.
19. Найдите значение выражения $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.
20. Решите уравнение: а) $\log_x 2\sqrt[4]{2} = -\frac{3}{4}$; б) $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x)\lg \frac{5}{3}$;
    в) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 1,5$; г) $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9\log_6 8$.
21. Пусть $\lg 5 = a$, $\lg_3 = b$. Выразите $\log_{30} 8$ через a и b.
22. Пусть $\log_7 2 = a$, $\log_3 2 = b$. Найдите $\log_{63} 4$.
23. Пусть $\log_{ab} a = n$. Найдите $\log_{ab} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.
24. Сравните: а) $\log_2 \frac{1}{7}$ и $\log_3 \frac{1}{7}$; б) $\log_5 130$ и $\log_3 25$.
25. Сравните: а) $\log_2 3 + \log_3 2$ и $\log_5 5\sqrt{5}$; б) $\log_7 10$ и $\log_{11} 13$; в) $5^{\log_3 7} + \sqrt{7}$ и $7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3}\log_7 19}$.
26. Упростите выражение $a^{\frac{2}{\log_b a}+1} \cdot b - 2a^{1+\log_a b} \cdot b^{1+\log_b a} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.