Исследование функции

Производная(повторение)

1. Продифференцируйте функцию:

   а) $y = x\sqrt[3]{x}$; в) $y = \dfrac{1-3x}{x+3}$ д) $y = \dfrac{1}{\arcsin^2 x}$;

   б) $y = x^3 \cos x$; г) $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$; е) $y = \sin(2\sqrt{x})$.

2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x = \dfrac{1}{3}t^3 + t^2 - 9t - 9$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 54 м/с?

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{4x+1}$ в точке $x_0 = 2$.

4. Прямая $y = -2x - 3$ является касательной к графику функции $y = 8x^2 - 26x + c$. Найдите c.

   Теорема Ферма (Необходимое условие существования экстремума). *В точке экстремума производная функции либо равна нулю, либо не существует.*

5. Найдите критические точки функции $y = |x^2 - 1|$.

   Достаточное условие существования экстремума. *Пусть функция непрерывна в точке x_0 и дифференцируема вблизи этой точки. Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция имеет максимум (минимум).*

   Признак монотонности функции. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I, а ее производная неотрицательна (неположительна) во всех внутренних точках I и равна нулю либо не существует лишь в конечном множестве точек. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на I.*

6. На рисунке изображен график функции $f(x)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

7. На рисунке изображен график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Определите значение производной функции в точке x_0.

8. На рисунке изображен график производной функции. а) Укажите точки экстремумов функции и промежутки монотонности. б) В какой точке отрезка $[-2; 6]$ функция принимает наибольшее значение?

9. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = (2x+1)^5(x-2)^4$. Изобразите схематически ее график.

   Достаточное условие выпуклости. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и во всех точках интервала $(a; b)$ $f''(x) \leqslant 0$, то функция на этом интервале выпукла вверх, если же $f''(x) \geqslant 0$ —- выпукла вниз. Если при этом $f''(x) = 0$ лишь в конечном числе точек, то выпуклость строгая.*

   Достаточное условие точки перегиба. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и дифференцируема в самой точке x_0. Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба для графика функции $f(x)$.*

10. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2+4}$на выпуклость и точки перегиба.

11. Постройте график функции $y = x^4 + 4x^3$, проведя ее "мини-исследование"по плану:
    1) нули, интервалы знакопостоянства,
    2) монотонность и экстремумы,
    3) выпуклость и точки перегиба.

    Найдите уравнение касательной в точке перегиба и постройте ее.

12. Проведите "мини-исследование"функции и постройте ее график:

    а) $y = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 5}$; б) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Домашнее задание

13. Продифференцируйте функцию: а) $y = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $\dfrac{tg2x}{2x}$; в) $y = \arccos\sqrt{x}$.

14. Напишите уравнение касательных к графику функции $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + x$, параллельных прямой $y = -x$ и вычислите расстояние между этими касательными

15. Напишите уравнение касательных к графику функции $y = \sqrt{2x+1}$, проходящих через точку $(1; 2)$.

16. Функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0. Следует ли отсюда, что в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 слева от точки x_0 функция возрастает, а справа убывает?

17. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции:

    а) $f(x) = \sin 2x + 6\sin x - 2x$; б) $f(x) = \dfrac{3x - 11}{\sqrt{2-x}}$.

18. Проведите "мини-исследование"функции и постройте ее график:

    а) $y = (x-2)^2(x+2)$; б) $y = 2x^3 - x^2 + 4x$; в)$y = x\sqrt[3]{x-1}$.

Асимптоты

Определение. Прямая называется ***асимптотой*** к графику функции $y = f(x)$, если расстояние от точки графика до прямой стремится к нулю при бесконечном удалении этой точки от начала координат.

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда функция $y = f(x)$ терпит в точке a разрыв, причем существует бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Для построения графика удобно найти отдельно пределы слева и справа и уточнить знаки бесконечностей.

Прямая $y = b$ является ***горизонтальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существует хотя бы один из конечных пределов: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

Для доказательства последнего утверждения его удобно разбить его на две части:
а) прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.
б) В этом случае существует и конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$.

Заметим, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k = 0$.

План полного исследования функции

1) Область определения.
2) Четность(нечетность), периодичность (если есть)
3) Нули, интервалы знакопостоянства. Значение в нуле.
4) Асимптоты.
5) Критические точки и их характер. Исследование на монотонность и экстремумы.
6) Исследование на выпуклость и точки перегиба.

19. Есть ли асимптоты у графиков из предыдущего номера?

20. Исследуйте функцию и постройте ее график. Укажите область значений функции.

а) $y = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; в) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$; д) $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$; ж) $y = x + \operatorname{arctg} x$;

б) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; г) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$; е) $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$; з) $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

Правило Лопиталя

21. Исследуйте функцию и постройте ее график $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

Как показывает этот пример, иногда раскрытие неопределенности при нахождении асимптот - основная техническая сложность при построении графика. В таких случаях часто применяют правило Лопиталя.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$:
1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2) дифференцируема на интервале $(a; b)$;
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда на этом интервале найдётся точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл: Если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа. Если функция f(x):
1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2) дифференцируема на интервале $(a; b)$,
то на этом интервале найдется такая точка ξ, что $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Теорема Коши. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a; b)$. Тогда существует $\xi \in (a; b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.*

Правило Лопиталя. *Пусть в проколотой окрестности x_0 функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы, причем $g'(x) \neq 0$. Пусть также $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

A может быть как конечным числом, так и бесконечностью. Правило Лопиталя применимо также к односторонним пределам и к пределам на бесконечности.

Для раскрытия неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ переходят к функциям $\dfrac{1}{f(x)}$ и $\dfrac{1}{g(x)}$.

22. Найдите предел функции двумя способами: с помощью правила Лопиталя и без него. Как проще?

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 3x}{6x^2 + 2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 3x}{6x + 2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x - 1) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

23. Софизм. Найдем предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x^2}$ двумя способами.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\sin x}{2}$, т.е. предела нет.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{\sin x}{x^2}\right)=1+0=1$.