# Показательная функция

## Степень с действительным показателем

Будем считать известными определение и свойства степени с положительным основанием $a$ и рациональным показателем $r$:

1) $a^r > 0$;
2) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
3) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$;
4) Если $r_1 < r_2$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$.

***Лемма 1.*** (непрерывность в нуле для рационального показателя):
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)((r \in \mathbb{Q}, |r| < \delta) \Rightarrow (|a^r - 1| < \varepsilon))$

***Теорема 1.*** *Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множества $M = \{a^m | m \in \mathbb{Q}, m < x\}$ и $B = \{a^b | b \in \mathbb{Q}, b > x\}$. У множеств $M$ и $B$ есть разделяющее число, и притом единственное.*

***Определение.*** *Разделяющее число множеств $M$ и $B$ называется* ***степенью $a^x$***.

***Лемма 2.*** *Пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$. Тогда если $x < r$, то и $a^x < a^r$.*

Аналогичные утверждения верны и для $x > r$, и для $0 < a < 1$.

***Теорема 2.*** *Все 4 перечисленные свойства степени с рациональным показателем выполняются и для степени с действительным показателем.*

## Определение и свойства показательной функции

***Определение.*** *Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция $y = a^x$, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$, называется* ***показательной***.

Согласно определению степени с действительным показателем, $1^x = 1$ для всех действительных $x$. Поэтому рассматривать показательную функцию при $a = 1$ незачем.

*Свойства показательной функции:*

1) График показательной функции проходит через точку $(0;\ 1)$.
2) При $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает на $\mathbb{R}$.
3) Функция $y = a^x$ непрерывна в каждой точке числовой оси.
4) Областью значений показательной функции является множество всех положительных чисел.

56. Постройте график функции: а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

57. Сравните числа: а) $(\sqrt{2})^{-0,3}$ и $(\sqrt{2})^{-0,2}$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{e}$.

58. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = -\frac{4}{x+2}$.

## Домашнее задание

59. Докажите, что $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ и $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ для любых $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

60. Сравните числа: а) $0,1^{-1,2}$ и $0,1^{-1,3}$; б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

61. Постройте график функции: а) $y = 2^{1-x}$; б) $y = -0,2^{|x+2|}$; в) $y = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

62. Постройте график функции $y = |2^x + 1| + |2^x - 1|$.

63. Решите неравенство $|x - 1| \geqslant 2,5^x$.

64. Найдите наибольшее целочисленное значение функции $y = 10^{\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x + 0,5}$

## *Показательные уравнения*

Так как показательная функция монотонна, то для всех $a>0$, $a\neq 1$ верен переход $\left(a^{f(x)}=a^{g(x)}\right)\Leftrightarrow (f(x)=g(x))$

65. Решите уравнение:

    а) $25^{3-2x}=\frac{1}{125}\cdot(25\sqrt{5})^{-x}$; б) $3^{2x-3}-9^{x-1}+27^{\frac{2x}{3}}=675$; в) $4^x+2\cdot 6^x-3\cdot 9^x=0$.

66. Решите уравнение:

    а) $4^x\cdot 5^{x+1}=5\cdot 20^{2-x}$;
    б) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}=12$;
    в) $\frac{2^x}{5^{x-1}}+3=\frac{5^x}{2^{x-1}}$;
    г) $9^{x+1}+9^{2x-1}=54\cdot 27^{x-1}$;
    д) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$;
    е) $7^{x+3}-7^{x+2}-2^{x+5}+2\cdot 0,25^{-(1+0,5x)}=0$;
    ж) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$;
    з) $8^{x+1}+8\cdot(0,5)^{3x}+3\cdot 2^{x+3}=125-24\cdot(0,5)^x$;
    и) $x^2\cdot 4^{\sqrt{2-x}}+4^{2-x}=4^{\sqrt{2-x}+2}+x^2\cdot 2^{-2x}$;
    к) $2^{x^2-4x+5}=1+\sin^2\frac{\pi x}{4}$;
    м) $1+3^{\frac{x}{2}}=2^x$.

67. Найдите все значения $p$, при которых уравнение $(p-1)\cdot 4^x-4\cdot 2^x+(p+2)=0$ имеет хотя бы одно решение.

68. Решите уравнение:

    а) $(x-3)^{\frac{x+1}{4}}=\sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$; б) $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$; в) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

69. Решите систему уравнений:

    а) $\begin{cases}\dfrac{2\cdot 4^x+1}{2^x+2}-4^x=\dfrac{y}{2^{x+1}+4}\\ 4\cdot 2^{3x}+y^2=4\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^{x+y}=y^{x-y}\\ x^2y=1\end{cases}$

## *Показательные неравенства*

Для всех $a>1$ верен переход $\left(a^{f(x)}>a^{g(x)}\right)\Leftrightarrow(f(x)>g(x))$.

Для всех $0<a<1$ верен переход $\left(a^{f(x)}>a^{g(x)}\right)\Leftrightarrow(f(x)<g(x))$.

$$\left(f(x)^{g(x)}>f(x)^{h(x)}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\(f(x)-1)(g(x)-h(x))>0\end{cases}$$

70. Решите неравенство:

    а) $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)}>8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$;
    б) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$;
    в) $\frac{15-16^{x+1}}{4^{2x}-4}\geqslant 2^{4x+1}-3$;
    г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}+15\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x-4<0$;
    д) $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;
    е) $(x^2-x+1)^x<1$;
    ж) $(x^2-4x+4)^{x^2-x-6}\geqslant 1$;
    з) $f\left(g(x)\right)<g\left(f(x)\right)$, где $f(x)=2^x$, $g(x)=4^x$.

## *Домашнее задание*

71. Решите уравнение:

    а) $3^{x-1}\cdot 2^{x+1}+2^{x-1}\cdot 3^x=\frac{7}{36}$;
    б) $4^x-3\cdot 2^{x+2}=64$;
    в) $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$;
    г) $4\cdot 2^{2x}-6^x=18\cdot 3^{2x}$;
    д) $2\cdot 15^x-3^x+2-4\cdot 5^{x+1}+90=0$;
    е) $25^{1-\cos 6x}=5^{\frac{1}{\operatorname{ctg}3x}}$;
    ж) $3^x+3^{2-x}=3\cdot(1+\cos 2\pi x)$;
    з) $|\cos x|^{\sin^2 x-1,5\sin x+0,5}=1$.

72. Решите неравенство:

    а) $4^{\sqrt{9-x^2}+1}+2<9\cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}$;
    б) $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geqslant(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$;
    в) $\frac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}>1$;
    г) $5\cdot 9^x-18\cdot 15^x+9\cdot 25^x>0$;
    д) $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant(x^2+x+1)^3$;
    е) $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}\leqslant 1$.

73. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на $a$ м, а верхняя точка постамента — на $b$ м. На каком расстоянии от памятника должен стать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?