

Логарифм и его свойства

Определение логарифма. Логарифмическая функция

Показательные уравнения из предыдущего листка чудесным образом имели рациональные решения. А всегда ли имеет решение уравнение $a^x = b$?

Определение. Показатель степени x , в которую надо возвести основание a , чтобы получить число b , называется **логарифмом числа $b > 0$ по основанию a** . То есть $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$.

74. Пользуясь только определением логарифма, вычислите: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_6 \sqrt[6]{6}$.

Дать объекту определение — еще не значит убедиться в его существовании. Для каких a и b существует $\log_a b$?

Определение. Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется **логарифмической** и обозначается $y = \log_a x$.

Вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$, а вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.

75. Постройте в одной системе координат графики функций: а) $y = \log_2 x$ и $y = \log_5 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции вытекает, что функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена для всех $x > 0$ и является на этом множестве непрерывной и монотонной (возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$).

76. Сравните: а) $\log_3 \frac{1}{5}$ и $\log_3 \frac{1}{6}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 6$.

77. а) Решите уравнение $3^x = 5$; б) Решите неравенства $3^x > 5$, $(0,3)^x > 5$.

Основное логарифмическое тождество. $a^{\log_a c} = c$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$.

78. Постройте график функции: а) $y = 2^{\log_2 x}$; б) $y = x^{\log_x 2}$.

79. Вычислите $9^{\log_3 5}$.

Арифметические свойства логарифмов

Теорема о логарифме произведения. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Следствие. $\log_a b^n = n \log_a b$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема о логарифме частного. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

80. Вычислите: а) $\log_2 27 - 2 \log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{11} (\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 7^{\log_7 4})^{2 \log_5 11}$.

81. Постройте график функции: а) $y = \log_2 x^2$; б) $y = \log_2 x^3$.

82. Найдите x , если $\lg x^2 = 4 \lg 3 + 2 \lg 6 - \lg 9$.

Теорема о логарифме степени. $\log_a b^k = \frac{k}{n} \log_a b$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \neq 0$.

Следствие. $\log_a b^k = k \log_a b$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \neq 0$.

83. Вычислите $\log_4 8$.

84. Вычислите:

а) $(3 \lg 2 - \lg 24) : (\lg 3 + \lg 27)$; в) $\log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{125} 9^3$; д) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} + \log_{0,2} \sqrt[3]{5}$;
 б) $\log_9 (\log_4 \sqrt[3]{4})$; г) $8^{\log_4 3 - \log_{16} 729}$; е) $\log_{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 4^{\frac{1}{3}} - \log_3 \sqrt[3]{256}$.

85. Постройте график функции: а) $y = -\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x \right) + \log_3 \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$; б) * $y = 0,5 \log_2 \sin^2 x$.

86. Решите уравнения:

а) $4^{1+\lg x} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{2+\lg x^2} = 0$; б) $(2 \cdot 3^x + 5^x) \cdot (3^{x+1} + 2 \cdot 5^x) = 15^{x+1}$.

87. Решите неравенства:

а) $\sqrt{0,8^{x(x-3)}} < 0,64$; б) $\sqrt{\pi^x - \frac{5}{4}} \geq 10 - \pi^x$; в) $\frac{2 \cdot 3^{x+3} - 5^{x+3}}{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x} < 1$.

88. * Решите уравнение $a \cdot 12^{|x|} = 2 - 12^{-|x|}$.

Домашнее задание

89. Решите уравнение: а) $\lg x = \frac{2}{3} \lg 24 - 2 + 1\frac{1}{3} \lg 3$; б) $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{11}{12}$.

90. Постройте график функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x)$; б) $y = 0,5^{\log_{0,5}(1-x^2)}$; в) $2^{|\log_{0,5} x|}$; г) $y = \log_2 \log_2 x$.

91. Вычислите:

а) $\log_4 \sqrt[3]{32}$; б) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$; в) $\log_5 75 + 3 \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3}$; г) $\frac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3} \log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{6}} 150}$.

92. Решите уравнения:

а) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 6 \cdot 3^{2-x}$; г) $2 \cdot 15^x - 3^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} + 90 = 0$;
 б) $9^{\sqrt{x}+0,5} - 39 \cdot 3^{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} + 12 = 0$; д) $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$.
 в) $\frac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$;

93. Решите неравенство

а) $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$; в) $\sqrt{24,75 - 3^x} \geq 3^x - 9$;
 б) $6^{x+2} \geq 4 \cdot 7^{|x+1|}$; г) $\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

94. Докажите, что для любой показательной функции $f(x) = a^x$ и любой геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, \dots с положительными членами найдется такая арифметическая прогрессия x_1, x_2, x_3, \dots , что для всех n будет $f(x_n) = b_n$.

Логарифмирование. Свойства логарифмов с разными основаниями

95. Зная, что $0,3 < \lg 2 < 0,302$, найдите количество знаков в десятичной записи числа 2^{100} .

96. Решите уравнения: а) $7^{x+3} \cdot 3^{\frac{x+3}{x+2}} = 1$; б) $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$; в) $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$.

97. Докажите формулу $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ при $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0$.

Следствие 1 (формула перехода к другому основанию). $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$ при $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0$.

Следствие 2. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ при $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.

98. Пользуясь формулой перехода, вычислите логарифмы: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_6 \sqrt[6]{6} \sqrt[4]{6}$.

99. Вычислите: а) $2^{\log \sqrt[3]{6^2}}$; б) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$.

Формула "обмена этажами". $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$

100. а) Вычислите $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; б) Вычислите еще раз $9^{\log_3 5}$.

101. Вычислите:

а) $5^{\frac{2 \log_4 5 + 1}{2 \log_4 5}}$; г) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$; д) $10^{\frac{\log_2 3 \cdot \log_5 3}{\log_2 3 + \log_5 3}}$;
 б) $(3\sqrt{3})^{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2\sqrt[3]{2})}$; е)* $4^{\log_{0,25} 0,1} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{12 + 2\sqrt{35}}$;
 в) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 16 \cdot \log_2 3)$; ж)* $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2 \log_{28} 7) \log_7 2 - \log_2 7$.

102. Упростите выражение:

а) $\frac{2^{\log_2 \sqrt[4]{2}^a} - 3^{\log_{27}(a^2+1)^3} - 2a}{7^{\log_{49} a^4} - 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{a}} - 1}$; б) $a\sqrt{\log_a b} - b\sqrt{\log_b a}$.

103. Пусть $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.

104. Пусть $\ln 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\ln 56$.

105. Пусть $\log_2 3 = a$, $\log_5 3 = b$, $\log_7 3 = c$. Выразите $\log_{140} 9$ через a , b и c .

106. Пусть $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$. Докажите, что $ab + 5(a - b) = 1$.

107. Пусть $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$. Докажите, что тогда $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

108. * Вычислите $15 \lg_x(x - 1)$, если $x^3 - 4x^2 + 3x = 1$.

109. Сравните: а) $\log_5 \sqrt{2}$ и $\log_{25} 3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; в) $\log_3 10 + 4 \lg 3$ и 4.

110. а) Докажите, что при $a > 1$ выполняется неравенство $\log_a(a + 1) > \log_{a+1}(a + 2)$.
б) Сравните $\log_{17} 19$ и $\log_{19} 20$.

111. Сравните $\log_{135} 675$ и $\log_{45} 75$.

Домашнее задание

112. Решите уравнение $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

113. Прологарифмируйте равенство по основанию 10: $x = \frac{\sqrt[3]{100\sqrt{10a\sqrt[3]{0,1a^2}}}}{10\sqrt{0,1a}}$.

114. Постройте график функции $y = x^{\frac{\log_2 \log_2 x}{\log_2 x}}$.

115. Вычислите:

а) $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$; г) $\frac{\log_7 5 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 4 + 2 \log_4 2}{2(2 \log_3 2 + 3 \log_{343} 7)}$;

б) $\frac{\log_5 12 - 2 \log_5 2}{\log_5 18 - \log_5 0,5}$; д) $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$;

в) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; е) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ)$.

116. Найдите значение выражения $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

117. Решите уравнение: а) $\log_x 2\sqrt{2} = -\frac{3}{4}$; б) $\lg^2 5 - \lg^2 3 = (1 - \lg x) \lg \frac{5}{3}$;

в) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 1,5$; г) $\log_6 x \cdot \log_8 x = 9 \log_6 8$.

118. Пусть $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Выразите $\log_{30} 8$ через a и b .

119. Пусть $\log_7 2 = a$, $\log_3 2 = b$. Найдите $\log_{63} 4$.

120. Пусть $\log_{ab} a = n$. Найдите $\log_{ab} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

121. Сравните: а) $\log_2 \frac{1}{7}$ и $\log_3 \frac{1}{7}$; б) $\log_5 130$ и $\log_3 25$.

122. Сравните: а) $\log_2 3 + \log_3 2$ и $\log_5 5\sqrt{5}$; б) $\log_7 10$ и $\log_{11} 13$; в) $5^{\log_3 7} + \sqrt{7}$ и $7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3} \log_7 19}$.

123. Упростите выражение $a^{\frac{2}{\log_b a} + 1} \cdot b - 2a^{1+\log_a b} \cdot b^{1+\log_b a} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b} + 1}$.

124. Дано: $a^2 + b^2 = 7ab$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

125. Вычислите: а) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$;

б) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.