Логарифмические неравенства

Логарифмические неравенства с постоянным основанием

172. Решите неравенство: а) $\log_{\frac{1}{3}} 2\cos x < -\frac{1}{2}$; б) $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2} > \frac{1}{x}$.

173. Решите неравенство: а) $\log_5(3x-2) \geqslant \log_5(6-5x)$;
б) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$; в) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$.

174. Решите неравенство:
а) $0,2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x-1}}$; б) $5^{2\log_5^2 x} - 4x^{\log_5 x} \geqslant 5$.

Логарифмические неравенства с переменной в основании

175. Решите неравенство $\log_{2x-3} x > 1$.

176. Решите неравенство:
а) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$; б) $\log_{|x-1|} 0,5 > 0,5$; в) $\log_x \frac{3}{2} < \log_x \frac{2}{3}$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}$.

Домашнее задание

177. Решите неравенство:
а) $5^{\log_3\left(\frac{x-2}{x}\right)} < 1$;
б) $\frac{4\log_{0,3} x+1}{\log_{0,3} x+1} \leqslant \log_{0,3} x + 1$;
в) $\log_3(2\sin x) \leqslant \frac{1}{2}$;
г) $\log_{x-1}(x+2) \leqslant 0$;
д) $\log_5(x-3) + \frac{1}{2}\log_5 3 < \frac{1}{2}\log_5(2x^2-6x+7)$;
е) $4\log_2 x + \log_2 \frac{x^2}{8(x-1)} \leqslant 4 - \log_2(x-1) - \log_2^2 x$.
ж) $\log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2$;
з) $x^{\log_{0,5} x+4} < 0,5^4 x$.

178. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1}}$.

Переход от логарифмических неравенств к рациональным

179. Решите неравенство $\log_{2x-1} 3 > \log_x 9$ двумя способами: а) методом интервалов;
б) пользуясь тем, что $\log_3 b$ имеет тот же знак, что и $b-1$.

Вообще, $\log_a b$ имеет тот же знак, что и $b-1$ при $a > 1$ и противоположный при $0 < a < 1$ (если он вообще существует :)

180. Решите неравенство:
а) $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+5)}{x^3-5x^2+4x} \leqslant 0$; б) $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1} x < 2$.

Если переменная находится и под знаком логарифма, и в его основании, удобен переход:

$$\log_{f(x)} g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x)-1)(g(x)-1) > 0 \\ f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

181. Решите неравенство:
а) $\log_x\left(\frac{3}{8-2x}\right) \geqslant -2$; б) $\log_{8x^2-0,5}(\log_{0,5} x) < 0$.

182. * А если кому-то все это слишком легко , пусть решит такое неравенство:
$$\frac{\log_5(x^2-4x+11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{\sqrt{2-5x-3x^2}} \geqslant 0.$$

Домашнее задание

183. Решите неравенство:
а) $\log_{x+2} 4 > \log_x 2$;
б) $\frac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})} \geqslant 0$;
в) $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$;
г) $\log_{2x}(x-4)\cdot\log_{x-1}(6-x) < 0$.

184. Сколько корней имеет уравнение $\frac{1}{16^x} = \log_{\frac{1}{16}} x$?

Метод интервалов и он же, но обобщенный

185. Решите неравенство $\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| > 0$.

186. Решите обобщенным методом интервалов: $\frac{\sqrt{2x+1}}{2+\log_{0,5}(x+1)} * 0$, если знак $*$ означает: а) $>$; б) $\geqslant$; в) $<$; г) $\leqslant$.

187. Решите неравенство:

а) $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$; в) $\dfrac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}}\geqslant 0$;

б) $\dfrac{\log_2|x|(2^x-2)}{\sqrt{3-x}+2x}\leqslant 0$; г) $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\leqslant 1$.

И вот - свобода!..

188. Решите неравенство:

а) $\dfrac{3^x-25}{x+1}\leqslant\dfrac{3^x-25}{x-3}$; в) $\log_{2x}\left(\log_3\dfrac{x+1}{x-1}\right)<\log_{\frac{1}{2x}}\left(\log_{\frac13}\dfrac{x-1}{x+1}\right)$;

б) $\sqrt{6-x}(2\cdot 9^{2x}-53\cdot 3^{2x}-27)\geqslant 0$; г) $\dfrac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\dfrac52-x\right)+\log_3 2}\leqslant 0$.

189. Решите неравенство:

а) $\log_{\sin^2 x}10>\log_{\cos^2 x}10$; г) $\log_{0,5}(x-3)-\log_{0,5}(x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}}2>0$;

б) $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\dfrac12$; д) $\log_2(2x)\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}$;

в) $\log_5 x+\log_x\left(\dfrac{x}{3}\right)<\dfrac{(2-\log_3 x)\log_5 x}{\log_3 x}$; е) $\log_3\log_4\dfrac{4x-1}{x+1}-\log_{\frac13}\log_{\frac14}\dfrac{x+1}{4x-1}<0$.

190. Решите неравенство (С-3 из сборника ЕГЭ-2011):

а) $\left(x+\dfrac8x\right)\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|\geqslant 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|$; в) $\sqrt{4\sin^2 x-1}\cdot\log_{\sin x}\dfrac{x-5}{2x-1}\geqslant 0$;

б) $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x-\dfrac{5}{12}}<-1$; г) $11^{-|x-1|}\cdot\log_5(4+2x-x^2)\geqslant 1$.

191. Решите неравенство $\left(\dfrac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x}>\left(\dfrac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

192. Решите неравенство $\log_3\left(\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt3}\right)^x\right)\geqslant\log_3\left(\left(\sqrt{2+\sqrt3}\right)^x+1\right)+1$.

193. Найдите произведение корней уравнения $2^{|\log_2 x|}=3$.

194. Решите уравнение: а) $\log_3(3^x-8)=2-x$; б) $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x)$.

195. Решите неравенство: а) $\left(\dfrac12\right)^{\log_3(1-x)}\geqslant 0,25$; б) $x\cdot 3^{\log_x 4}>12$.

196. Решите неравенства: а) $\dfrac{6}{2x+1}>\dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$; б) $\log_{\frac13}(2x+3)<2x-1$.

Указание. Ответ можно получить с помощью графиков. Но график — не доказательство, надо ссылаться на свойства функций.

197. Решите неравенства:

а) $\left|x-4^{1+\sqrt{3-x}}\right|\leqslant\dfrac53x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}$; б) $\dfrac1x\sqrt{10x-8-2x^2}-\left(\sqrt{x^2-5x+4}+\dfrac12\right)\cdot\log_5\dfrac{x}{16}\leqslant 1$

198. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2)>z^2-9z+17.$$

Домашнее задание

199. Решите обобщенным методом интервалов: $\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{8-2x-x^2}}*0$, если $*$ означает: а) $>$; б) $\geqslant$; в) $<$; г) $\leqslant$.

200. Решите неравенство:

а) $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}(x^2-2,5x+1)\geqslant 0$; г) $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$;

б) $(x^2-5x+3)\lg\left(1-\dfrac{x}{3}\right)\geqslant\lg\dfrac{3}{3-x}$; д) $\dfrac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|}\geqslant 0$;

в) $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}<\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$; е) $\log_x(\log_3(9^x-6))\geqslant 1$.

201. Решите систему (С-3 из пробного варианта ЕГЭ-2012):

$$\begin{cases} 7\log_9(x^2-x-6)\leqslant 8+\log_9\dfrac{(x+2)^7}{x-3}\\ \dfrac{1}{3^{x-1}}+\dfrac{1}{3^x}+\dfrac{1}{3^{x+1}}<52\end{cases}$$

202. Решите неравенство:

а) $(2^x-3^x)\log_x(x^2-5x+7)>0$; г) $\log_{\frac12}|\cos x|\cdot\log_5(x^2-9)<0$;

б) $\dfrac{\sqrt{3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1}}{x^2-x-6}\leqslant 0$; д) $4^{\sin^2 x}<\dfrac{12}{4^{\sin^2 x-1}}$;

в) $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1}<\dfrac{6}{2x-1}$; е) $x\cdot 10^{\log_x 11}<110$.