Первообразная и неопределенный интеграл

Дифференциал

Напомним, что ***дифференциал*** — линейная относительно Δx часть приращения функции.
$df(x) = f'(x)dx$ или $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

$d(cu) = cdu$; $d(uv) = vdu + udv$; $df(u(x)) = f'(u) \cdot du(x)$.
$d(u+v) = du + dv$; $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$;

256. Составьте таблицу дифференциалов элементарных функций.
257. Найдите дифференциалы: а) $d\left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; б) $d \log \sin x$; в) $d\frac{x^2+x}{x-1}$.
258. Найдите дифференциалы следующих функций:

а) $y = \cos\sqrt{5x - \frac{\pi}{3}}$; б) $y = e^{x^\alpha}$; в) $y = x^2 \arccos x$; г) $y = e^x \sin x$.

Первообразная

Пример 1. Координата тела меняется по закону $s(t) = 5t^2 - 2t + 1$. Найдите скорость и ускорение тела через 3 секунды.

Пример 2. На покоящееся тело массой 5 кг начинает действовать сила 10 Н. На какое расстояние переместится тело за 3 секунды?

Какой из двух примеров более естественен?

Определение. ***Первообразной*** *для данной функции $f(x)$, заданной на некотором промежутке, называется функция $F(x)$, заданная на том же промежутке, производная которой равна $f(x)$.*

Таким образом, $F'(x) = f(x)$. Другая запись: $dF(x) = f(x)dx$.

Процесс отыскания первообразных называется ***интегрированием*** функций.

Термин происходит от лат. "integrare"«восстанавливать», далее от "integer"«нетронутый, целый», из in- «не-, без-» + tangere «трогать, касаться».

Пример 3. Проинтегрируйте функции: а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = \sin x$.

Основное свойство первообразной. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, то для любого числа C функция $F(x)+C$ тоже является первообразной для $f(x)$ на этом промежутке. Других первообразных у $f(x)$ на этом промежутке нет.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют ***неопределенным интегралом*** *этой функции и обозначают $\int f(x)dx$.*

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а C пробегает множество всех действительных чисел.

$f(x)$ называют ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — переменной интегрирования, а C — постоянной интегрирования.

Формулу $\int f(x)dx = F(x) + C$ можно записать также в виде
$\int F'(x)dx = F(x) + C$ или $\int dF(x) = F(x) + C$.

Чтобы из бесконечного множества первообразных выделить одну, надо задать начальные условия.

Пример 4. Найдите первообразную $F_0(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$, принимающую значение 1 при $x = 1$.

Пример 5. Функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) = (x+5)\ln(7-x)$ и $g(x) = (x-2)\ln(x+4)$ соответственно. Сравните $F(2)$ и $G(4)$, если $F(3) = G(3)$.

Арифметические свойства неопределенного интеграла

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. Интеграл суммы равен сумме интегралов, если они существуют.

Таблица основных интегралов

$\boxed{1}$ $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;

$\boxed{2}$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\boxed{3}$ $\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\boxed{4}$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; $\boxed{5}$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

$\boxed{6}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$; $\boxed{7}$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

$\boxed{8}$ $\int e^x dx = e^x + C$; $\boxed{9}$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

$\boxed{10}$ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

Простейшие примеры интегрирования

1) $\int (x^4 - 6x^2 + 5x - 7)dx$;   2) $\int \frac{(x^2+5x-7)dx}{\sqrt{x}}$;   3) $\int \left(x\sqrt[3]{x} - \frac{6}{x^2}\right)dx$;

4) $\int (3-x^2)^3 dx$;   5) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;   6) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx$;

7) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$;   8) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$;   9) $\int (1 + \sin x + \cos x)dx$;

10) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx$;   11) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$;   12) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

259. Наименьшее значение первообразной для функции $f(x) = x^2 + 10x + 28$ на отрезке $[-5;\ -2]$ равно -15. Найдите ее наибольшее значение на этом отрезке.

Домашнее задание

260. Найдите дифференциалы следующих функций:

а) $y = 5x^3 - \frac{2}{x^3}$;   в) $y = \sin 8x + \operatorname{tg} 2x$;   д) $y = (x^3 - 1)e^{x^3}$;   ж) $y = x^2 \cos x$;

б) $y = 6\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$;   г) $y = \frac{x}{1+x^2}$;   е) $y = \log_2 \arcsin x$;   з) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

261. Точки $K(3;\ 9)$ и $\mathrm{T}(3;\ -1)$ лежат соответственно на графиках функций $y = F(x)$ и $y = G(x)$, являющихся первообразными для функции $f(x) = \sqrt{3x} + 3\ln(x-2)$. Найдите расстояние между касательными к графикам, проведенными в этих точках.

262. При каких a уравнение $x^2 + 2x + |4x - 4| = ax + 3$ имеет ровно 2 решения?

Линейная замена переменной

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + \mathrm{C}$.

13) $\int \frac{dx}{(x-2)^k}$, $k \neq 1$;   14) $\int \frac{dx}{x+2}$;   15) $\int \cos 3x dx$;

16) $\int (2x-3)^{10}dx$;   17) $\int \sqrt[3]{1-3x}dx$;   18) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;

19) $\int \cos 7x \cos 4x dx$;   20) $\int \sin^2 3x dx$;   21) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Еще 4 табличных интеграла:

$\boxed{11}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$; $\boxed{13}$ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

$\boxed{12}$ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$; $\boxed{14}$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$.

Проинтегрируйте, используя табличные интегралы:

22) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$;   23) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$;   24) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.