Интегрирование: метод замены переменной

Теорема. *Пусть* $t = g(x)$ *дифференцируема на промежутке* X, *и* $\int f(t)dt = F(t) + C$ *на образе этого промежутка* $g(X)$. *Тогда* $\int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + \mathrm{C}$.

25) $\int \sin^3 x \cos x dx$; 26) $\int \sin^3 x dx$; 27) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$; 28) $\int \operatorname{tg} x dx$;
29) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; 30) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$; 31) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 32) $\int \frac{6^x}{9^x - 4^x} dx$;
33) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$; 34) $\int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$; 36) $\int x(1-x)^{10} dx$; 37) $\int x\sqrt{2-5x} dx$;
38) $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

Интегрирование произведения степеней синуса и косинуса

39) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$; 40) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$; 41) $\int \sin^4 x dx$; 42) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Тригонометрическая замена

Для интегрирования функций, содержащих $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ применяют следующие замены:
$x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$),
$x = a \operatorname{tg} t$ (или $x = a \operatorname{ctg} t$),
$x = \frac{a}{\sin t}$ (или $x = \frac{a}{\cos t}$).
Используются и другие тригонометрические замены, например, $x = a \sin^2 t$.

43) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \mathrm{C}$ (табличный интеграл)
44) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}^3}$; 45) $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$; 46) $\int \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} dx$;
47) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$ (табличный интеграл)

Тригонометрическая замена применяется и в других задачах.

48) Среди всех решений $(x, y, z, v,)$ системы
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + v^2 = 9 \\ xv + yz \geqslant 6. \end{cases}$$
найдите такие, при которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

49) Докажите, что из любых пяти чисел можно выбрать два числа x и y таких, что выполняется неравенство $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1$.

Домашнее задание

51) $\int \frac{x dx}{x^2+3}$; 52) $\int \frac{\cos x dx}{5 + \sin^2 x}$; 53) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; 54) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;
55) $\int \operatorname{ctg} x dx$; 56) $\int \frac{\ln x dx}{x}$; 57) $\int \frac{dx}{\sin x}$; 58) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;
59) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$; 60) $\int x\sqrt[3]{1-x} dx$; 61) $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$; 62) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$;
63) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; 64) $\int \cos^4 x dx$.