Определенный интеграл - 1

Равномерная непрерывность функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **равномерно непрерывной** *на множестве M, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon))((|x_1 - x_2| < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon))$.*

65. Напишите определение функции, непрерывной на множестве M. Найдите отличие.
66. Докажите, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ на интервале $(0;\ 1)$ непрерывной является, а равномерно непрерывной — нет.

Теорема Кантора. Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Площадь криволинейной трапеции

Определение.Рассмотрим два числовых множества: множество A_F площадей многоугольников, содержащихся в данной фигуре F, и множество B_F площадей многоугольников, содержащих F. Если эти множества разделяются единственным числом, то это число называется ***площадью*** *фигуры F, а сама фигура —* ***квадрируемой****.*

Определение. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a,\ b]$. Фигуру, ограниченную снизу осью абсцисс, сверху графиком функции $f(x)$, а с боков прямыми $x = a$ и $x = b$ называют ***криволинейной трапецией****.*

Для нахождение площади криволинейной трапеции разобьем отрезок $[a,\ b]$ на n частей и рассмотрим верхнюю и нижнюю ***интегральные суммы Дарбу***.

Лемма 1. При добавлении к разбиению новой точки верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Лемма 2. Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит верхней. (это означает, что для множеств A и B всех нижних и всех верхних интегральных сумм есть хотя бы одно разделяющее число)

Теорема. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна $[a,\ b]$, то разделяющее число для множеств A и B единственно (т.е. соответствующая криволинейная трапеция квадрируема).

Определение определенного интеграла

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,\ b]$. Если разделяющее число для множеств A и B единственно, то оно называется ***определенным интегралом*** *функции f от a до b и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а функция $f(x)$ называется* ***интегрируемой по Риману*** *на $[a,\ b]$.*

Т. е. ***определенный интеграл равен площади соответствующей криволинейной трапеции***.

Замечание. Вместо верхних и нижних интегральных сумм Дарбу можно рассматривать ***интегральные суммы Римана***. Они отличаются тем, что на каждом отрезке разбиения выбирается значение функции в произвольной его точке.

67. Докажите, что сумма Римана заключена между суммами Дарбу для соответствующего разбиения.
68. Докажите, что если существует предел интегральных сумм Римана при стремлении мелкости разбиения к нулю, то функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,\ b]$ (а указанный предел равен $\int\limits_a^b f(x)dx$).

Замечание. Верно и обратное. Примем без доказательства; пользоваться можно любым определением.

69. Докажите, что интегрируемая функция ограничена.
70. Всякая ли ограниченная функция интегрируема?
71. Как доказано выше, непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем. А может ли разрывная функция быть интегрируемой?
72. Пусть функция обращается в нуль на отрезке $[a,\ b]$, за исключением конечного числа точек, в которых она определена. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.
73. Докажите, что если функция определена, ограничена и имеет конечное число точек разрыва на $[a,\ b]$, то она интегрируема по Риману на $[a,\ b]$
74. Запишем каждое рациональное число (кроме 0) в виде несократимой дроби $\dfrac{m}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$ и определим функцию Римана $R(\dfrac{m}{n}) = \dfrac{1}{n}$. Если же $x = 0$ или x иррационально, то $R(x) = 0$. Докажите, что функция Римана интегрируема на отрезке $[0,\ 1]$.