Определенный интеграл - 2

Формула Ньютона-Лейбница

*Определение. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$, и $x \in [a,\, b]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.*

Теорема Ньютона-Лейбница. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$ неотрицательна и непрерывна. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$.

Формула Ньютона-Лейбница. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$ неотрицательна и непрерывна, $F(x)$ — ее первообразная на отрезке $[a,\, b]$. Тогда площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху графиком функции $f(x)$, а с боков прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a < b$, равна $F(b) - F(a)$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

75. Вычислите определенные интегралы. Начертите соответствующие криволинейные трапеции.

    а) $\int\limits_0^1 x^2dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 (1-x^2)dx$.

76. Найдите ошибку: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = -2$

Свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ *(при перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак)*

2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

4а) $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$; 4б) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ *(линейность)*

77. Вычислите интеграл: а) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$.

78. Вычислите интеграл $\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx$ двумя способами: по формуле Ньютона-Лейбница и геометрически.

Вычисление площадей с помощью интеграла

79. Найдите площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

    а) $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^2$ и $x + y = 2$; д) $y = 2^x$, $y = 2$ и $x = 0$;
    б) $y = x^2 + 2x - 3$ и осью абсцисс; г) $y = \sin x$, $y = x - \pi$ и $x = 0$; е) $y^2 = x^2(1-x^2)$.

80. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{-2x-x^2}dx$

81. Вычислите $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$.

82. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 1 + \cos \pi x$ и $y = 2x^2 - 2$.

83. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ и касательной к графику функции $g(x)$ в его точке с абсциссой 16.

84. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 3|x| + x$ и касательными к нему, проходящими через точку $A\left(-\frac{5}{4}; -\frac{13}{2}\right)$.

85. При каком a прямая $y = a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 3 - x^2 - 2x$, пополам?

86. Найдите площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > 0,\ b > 0$.

87. * Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$.

Домашнее задание

88. Приведите пример неинтегрируемой функции, квадрат которой интегрируем.

89. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

90. Вычислите $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x^{2011} - 2012x)\operatorname{tg}^2 x dx$.

91. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \dfrac{2}{(2x-1)^2}$, касательной к нему в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и прямой $x = 2$.

Виленкин, №№ 41 (1-4), 49.

Замена при вычислении определенных интегралов

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, а функция $x = \phi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\, \beta]$. Пусть также все значения $x = \phi(t)$ при $t \in [\alpha,\, \beta]$ принадлежат отрезку $[a,\, b]$; в частности, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

92. Можно ли при вычислении интеграла $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x}dx$ положить $x = \sin t$?

93. Можно ли при вычислении интеграла $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ положить $x = \sin t$? Можно ли в качестве новых пределов взять числа π и $\dfrac{\pi}{2}$? Подтвердите свое мнение вычислением.

94. Проинтегрируйте с помощью замены: а) $\int\limits_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$; в)* $\int\limits_0^{0,75} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

95. Вычислите: а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{2+\cos x}$; б) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{\cos^2 x + 5\cos x + 6}$.

96. Объясните, почему неверны следующие замены:
а) $t = x^{\frac{2}{3}}$ в интеграле $\int\limits_{-1}^1 dx$; б) $x = \dfrac{1}{t}$ в интеграле $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Разные задачи

97. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \int\limits_{-2}^{x} \dfrac{\sin\frac{\pi t}{4}}{t^2+2}dt$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 2$.

98. Найдите минимумы функции $f(x) = \int\limits_0^x (2\cos^2 t - \sin 2t)dt$ на отрезке $[0;\, \pi]$.

99. Вычислите с помощью определенных интегралов следующие пределы:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \sin\dfrac{\pi k}{n}$.

Физический смысл определенного интеграла

100. Пусть скорость материальной точки изменяется по закону $v = f(t)$. Найдите перемещение точки с момента времени $t = a$ до момента $t = b$.

101. Найдите перемещение тела за первые 5 секунд: а) при свободном падении; б) если скорость меняется по закону $v = 3\sin \pi t$.

102. Найдите давление, оказываемое водой на плотину, имеющую форму треугольника, обращенного вершиной вниз, если основание треугольника равно l, а высота h.

103. Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы поднять с поверхности Земли тело массой m на высоту h. С помощью полученного результата определите вторую космическую скорость.

Домашнее задание

104. Вычислите, с какой силой вода давит на вертикальную плотину в форме трапеции, верхнее основание которой равно **70м**, нижнее — **50м**, а высота — **20м**.

105. Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из вертикально стоящей цилиндрической цистерны высотой H и с радиусом основания R.

106. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 3x - 1$ и графиком той первообразной функции $y = x^2 + 2x$, для которой данная прямая является касательной.

107. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \int\limits_0^x (2\cos^2 t + \cos t - 1)dt$, $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, параллельной прямой $x + y = 1$.

108. Вычислите следующие определенные интегралы:
а) $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{xdx}{x^2+x+1}$.

109. Объясните, почему неверна замена $t = \operatorname{tg} x$ в интеграле $\int\limits_0^\pi \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$.

110. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \sqrt{1+\dfrac{k}{n}}$.