Тренировочная олимпиада

Задача 11. На прямой расположена фишка. Петя и Вася играют в такую игру: Вася называет положительное число, не большее 1, а Петя двигает фишку вправо или влево (по своему выбору) на расстояние, названное Васей. При этом Пете запрещается 10 раз подряд двигать фишку в одну сторону. Может ли Вася называть такие числа, чтобы через некоторое число ходов фишка гарантированно оказалась сдвинутой вправо на расстояние, большее 1000?

Задача 12. Внутри треугольника ABC расположена точка M. Ее проекции на стороны AB, AC, BC соответственно точки C_1, B_1, A_1. Через середины отрезков A_1B_1 и MC провели прямую l_1. Прямые l_2, l_3 определяются аналогично. Докажите, что три прямые пересекаются в одной точке.

Задача 13 (ММО 2012). Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y = 2a + \frac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \frac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y = 2b + \frac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \frac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

Задача 14. Дано нечетное натуральное n. Известно, что при любых натуральных a и b, для которых $a^2b + 1$ делится на n, число $a^2 + b$ также делится на n. Найдите все возможные значения n.

Задача 15 (ММО 2012). На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4.