Геометрический разнобой

Определение 1. Даны окружность ω с центром O и радиусом r, и точка M, такая, что $|OM| = d$. *Степенью* точки M относительно окружности ω называется величина $d^2 - r^2$

Факт. Даны две неконцентрические окружности. Геометрическим местом точек степени которых относительно этих окружностей равны является прямая. Эта прямая называется *радикальной осью.*

Факт (Теорема Чевы). Три чевианы AA', BB', CC' треугольника ABC проходят через одну точку. тогда и только тогда когда

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1$$

Задача 21. На сторонах треугольника AB, AC и BC треугольника ABC выбраны точки D, E и F соответственно таким образом, что $DE||BC$ и $EF||AB$. Докажите, что $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

Задача 22. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Описанная окружность треугольника BCD пересекает сторону AB в точке E, а описанная окружность треугольника ABD пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE = CF$.

Задача 23 (Тригонометрическая форма теоремы Чевы). Докажите, что три чевианы AA', BB', CC' треугольника ABC проходят через одну точку тогда и только тогда когда

$$\frac{\sin ACC'}{\sin BCC'} \cdot \frac{\sin BAA'}{\sin CAA'} \cdot \frac{\sin CBB'}{\sin ABB'} = 1$$

Задача 24. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

Задача 25. Дана трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$. На основаниях AD и BC выбраны точки P и K соответственно так, что $\frac{AP}{PD} = \frac{BK}{KC}$. На отрезке PK выбраны точки X и Y так, что $\angle AYD = \angle BCD$ и $\angle BXC = \angle ADC$. Докажите, что точки C, D, X, Y лежат на одной окружности.

Задача 26 (ММО 2009). Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен $120°$. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом $60°$ друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N. Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.