Разнобой с комплексными числами

Определение 1. *Комплексным числом* называется запись вида $a + bi$, где a и b действительные числа, а i — формальный символ. Умножение комплексных чисел задается правилом $i^2 = -1$.

Число a называется *вещественной частью* и обозначается $\mathrm{Re}(z)$ Число b называется *мнимой частью* и обозначается $\mathrm{Im}(z)$.
Будем отождествлять комплексное число $z = x + iy$ с точкой $Z = (x, y)$ плоскости.

Определение 2. *Модулем* числа z (обозначается $|z|$) называется длина вектора OZ, а *аргументом* числа z (обозначается $\arg z$) — ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором OZ.

Упражнение. Вычислите $(1 + i)^4$.

Задача 31. Компания "ДолгоДорогСтрой"строит участок дороги Москва — Санкт-Петербург, длиной 40 км. В первый день работники компании построили 1 км, а каждый последующий стоили $1/x^{10}$ км дороги, где x — длина уже построенной дороги в километрах. Выполнят ли заказ работники компании "ДолгоДорогСтрой"?

Задача 32. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z таких, что а) $|z - z_0| < r$; б) $|z - z_1| = |z - z_2|$; в) $\dfrac{z - i}{z - 1} \in \mathbb{R}$.

Задача 33. Дан треугольник ABC и точка P. Прямая l_1 симметрична прямой AP относительно биссектрисы угла A. Аналогично определяются прямые l_2 и l_3. Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке Q. Точки Q и P называются *изогонально сопряженными.*

Задача 34. а) Степень каждой вершины графа меньше d. Докажите, что его вершины можно покрасить в d цветов *правильным образом* (т.е. так что вершины одного цвета не были соединены ребром)
б) В связном графе степень каждой вершины не больше d, а у одной вершины строго меньше d. Докажите, что его вершины можно покрасить в d цветов правильным образом.

Задача 35. Через $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ обозначим множество чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$. Докажите, что множество $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ является *числовым полем*, т.е. замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления.

Задача 36 (Всероссийская 1999, Рег. этап). На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются точки $X, Y \in \omega$, такие что $A \in XY$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.