Разнобой с комплексными числами

Определение 1. Пусть $z = a + bi$ — комплексное число. *Комплексно сопряженным* к z числом называется $\bar{z} = a - bi$

Упражнение. Вычислите а) $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^4$ б) $\dfrac{1}{a+bi}$.

Упражнение. Докажите, что сопряжение согласовано с операциями т.е. а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; в) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Задача 41. а) Какие точки при изогональном сопряжении остаются на месте? б) Найдите точку изогонально сопряженную центру описанной окружности.

Задача 42. а) Пусть числа z_1 и z_2 комплексно сопряжены. Докажите, что $z_1^n + z_2^n$ вещественно. б) Пусть z_1, z_2 — корни квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Докажите, что $z_1^n + z_2^n$ — рационально.

Задача 43. Многочлен $P(x)$ имеет действительные коэффициенты, но не имеет действительных корней. Докажите, что количество его комплексных корней — четно.

Задача 44 (Всероссийская 2004, финал). В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.