Открытые и замкнутые множества

Определение 1. Множество в $M \subset \mathbb{R}^2$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Иными словами, для любой сходящейся последовательности $\{x_n\} \in M$ ее предел также лежит в M

Множество в $U \subset \mathbb{R}^2$ называется *открытым*, если для любой точки $A \in U$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что U содержит ε-окрестность точки A.

Аналогично можно определить открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}^n$.

Задача 81. Являются ли следующие множества открытыми, замкнутыми: а) отрезок на прямой; б) интервал на прямой; в) прямая на плоскости; г) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$; д) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; x^2 + y^2 + 2z^2 < 1\}$; е) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; x, y, z \geqslant 0, x + y + z = 1\}$?

Задача 82. Докажите, что объединение и пересечение двух открытых множеств является открытым.

Задача 83. Докажите, что объединение и пересечение двух замкнутых множеств является замкнутым.

Задача 84. Внутри остроугольного треугольника $\triangle ABC$ дана точка P. Опустив из нее перпендикуляры на стороны получим точки $\triangle A_1B_1C_1$. Проделав ту же операцию получим $\triangle A_2B_2C_2$ а потом $\triangle A_3B_3C_3$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$.

Задача 85. а) Докажите, что дополнение к открытому множеству является замкнутым. б) Докажите, что дополнение к замкнутому множеству является открытым.