Материалы второго семестра.

Задача 1 (Округ 11 класс 2010). В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

29 12 2012 Обсуждалось понятие индекса многоугольника. Доказано что он непрерывен на дополнении к границе. Что у внешних точек он равен нулю, а у внутренний он равен 1. Из этого выводилась ОТА (дама с собачкой).

10 01 2013 Существование внутренней диагонали. Утверждение о том, что из любой вершины выходит диагональ.

Задача 2. а) На плоскости даны 5 точек. Двое по очереди проводят отрезки соединяющие эти точки, так чтобы проведенные отрезки не пересекались. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
б) Тоже самое для n точек.

17 01 2013

Задача 3 (ММО 2012). В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, то $AH + BH > 2R$.

неравенство Иенсена для двух. Определение выпуклой функции.
Вторая проивзодная. Неравенство с весами.
Неравенство Иенсена с α и через массы.
Неравенство для x^2. Неравенство для $\log$

Задача 4 (Регата 2010). Докажите, что $AI + BI + CI \geqslant 6r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, I — ее центр.

24.01.2013

Задача 5. Пусть α, β и γ — углы остроугольного треугольника. Найдите минимальное и максимальное значение $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

Задача 6. а) Олег написал на доске 100 чисел, а Игорь нашел их попарные разности. Какое минимальное число попарных разностей будет делится на 7. б) На какую минимальную степень 7 будет делится произведение найденных Олегом чисел.

Задача 7 (Устный тур Турнира Тургора 2010). Обозначим через $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ произведение всевозможных попарных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ число $D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ делится на $D(1, 2, \ldots, n)$.

Задача 8 (Турнир Колмогорова 1999). Натуральные числа a, b, c таковы, что a^b делится на c, b^c делится на a, а c^a делится на b. Докажите, что $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на abc

Задача 9 (Всероссийская 1996. Рег. этап). Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

31.01.2013

Задача 10. Докажите неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_4+a_5}+\frac{a_4}{a_5+a_1}+\frac{a_5}{a_1+a_2} \geqslant \frac{5}{2}$$

Задача 11 (ММО 2010). Докажите, что если числа x, y, z при некоторых значениях p и q являются решениями системы $y = x^n + px + q$, $z = y^n + py + q$, $x = z^n + pz + q$, то выполнено неравенство $x^2y + y^2z + z^2x > x^2z + y^2x + z^2y$. Рассмотрите случаи а) $n = 2$; б) $n = 2010$.

7.02.2013

Задача 12 (ММО 2011). Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle BOC = 90°$. Найдите отношение $AC : OC$.

Задача 13 (ММО 2011). В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

Задача 14 (ММО). На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

14.02.2013

Задача 15. Даны две точки A, B и число k. Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 - BM^2 = k$.

Задача 16 (Теорема Карно). Докажите, что для того чтобы перпендикуляры опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, AC, AB соответственно пересекались в одной точке необходимо и достаточно, чтобы $A_1B^2 - BC_1^+ C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$.

Упражнение. Выведите из теоремы Карно, что а) серединные перпендикуляры к сторонам; б) высоты пересекаются в одной точке.

Задача 17. Докажите, что для того чтобы перпендикуляры опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, AC, AB соответственно пересекались в одной точке то и перпендикуляры опущенные из точек A, B, C на B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 пересекаются в одной точке.

Задача 18. Даны четырехугольник $ABCD$. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения высот треугольников BCD, ACD, ABD. Докажите, что перпендикуляры опущенные из точек A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 пересекаются в одной точке.

Задача 19 (Тургор 2010). В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP, в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.

Задача 20. а) Даны две точки A, B и числа α, β, k. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\alpha AM^2 + \beta BM^2 = k$.
б) Даны точки $A_1, A_2, \ldots A_n$, и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, k$. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i M^2 = k$.

21.02.2013

Задача 21 (Украинская Соросовская олимпиада 2000). Дан квадрат $ABCD$ со стороной один и точки X, Y внутри квадрата. Докажите, что $AX + \sqrt{2}DX + XY + \sqrt{BX} + CX \geqslant \sqrt{2}$

Задача 22. Дан треугольник ABC. Найдите точку P внутри треугольника такую, что а) $\sqrt{2}AP + BP + CP$; б) $xAP + yBP + zCP$ — минимально.

Задача 23 (Всеукраинская 2001). Остроугольный треугольник ABC вписан в круг ω. Пусть N — середина дуги AC которая не содержит B, M — середина стороны дуги BC которая не содержит A, D точка дуги MN такая, что $MN \parallel CD$. Пусть K — произвольная точка дуги AC не содержащей точку B, I, I_1, I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABC, KAC, KBC соответственно, L точка пересечения прямой DI с ω.

Докажите, что точки K, L, I_1, I_2 лежат на одной окружности.

28.02.2013

Задача 24 (ММО 2011). В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.
1) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.
2) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.

Задача 25 (ММО 2010). Команда из n школьников участвует в игре: на каждого из них надевают шапку одного из k заранее известных цветов, а затем по свистку все школьники одновременно выбирают себе по одному шарфу. Команда получает столько очков, у скольких её участников цвет шапки совпал с цветом шарфа (шарфов и шапок любого цвета имеется достаточное количество; во время игры каждый участник не видит своей шапки, зато видит шапки всех остальных, но не имеет права выдавать до свистка никакую информацию). Какое наибольшее число очков команда, заранее наметив план действий каждого её члена, может гарантированно получить:
а) при $n = k = 2$;
б) при произвольных n, k.

Задача 26 (ММО 2009). На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции

$$y = sinx, \quad x \in (0; \alpha)$$

Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если: а) $\alpha \in (\pi/2, \pi)$; б) $\alpha \in (0, \pi/2)$

Задача 27 (ММО 2009). Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

07.03.2013

Задача 28. a, b — натуральные числа. Что больше a^b или b^a?

Задача 29 (ММО 2011). При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ чисел $1, 2, \ldots, 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}}}$$

будет наибольшим?

Задача 30 (Олимпиада по геометрии 2005). Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

Задача 31 (ММО 2009). Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрел форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

Задача 32 (ММО 2010). В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

21.03.2013

Задача 33 (ММО 2013). Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину другой дуги BC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C?. а) Докажите, что точки A?, B? и C? лежат на одной прямой. б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI.

Задача 34. Докажите, что

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Задача 35. Оцените $\binom{2n}{n}$

4.04.2013

Задача 36 (ММО 2013). Дана функция $f(x)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен Q_p степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(x) \equiv Q_p(x) \pmod p$. Верно ли, что существует многочлен Q_x такой, что $f(x) = Q(x)$ для любого целого x?

Любая функция из $\mathbb{F}_p$ в $\mathbb{F}_p$ — многочлен, степени не выше $p-1$.

Определение дискретной производной $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. Определение $x^{\underline{n}} = x \cdot \ldots \cdot (x-n+1)$. Соотношения $\Delta(x^{\underline{n}}) = nx^{\underline{n-1}}$, $\Sigma(x^{\underline{n}}) = \frac{1}{n+1}x^{\underline{n+1}}$.

11.04.2013

Задача 37. Докажите, что $\sum_{i=0}^{k} i^k C_n^i = 0$, при $0 \leqslant k < n$

Доказательство по индукции, через разностную производную и через производящие функции.

Задача 38. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ является бесконечно дифференцируемой и все ее производные в нуле равны 0.

Задача 39. Придумайте бесконечно дифференцируемую функцию f такую, что

а) $f(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0]$ и $f(x) \neq 0$ иначе.
б) $f(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ и $f(x) \neq 0$ иначе.
в) $f(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0]$ и $f(x) = 1$ при $x \in (1, +\infty]$.

18.04.2013

Формула Тейлора. Остаточный член в интегральной форме

Пример функции у которой есть первая производная, но нет второй. Пример функции у которой производная не непрерывна

Ряд Тейлора для многочлена. Для экспоненты, синуса, косинуса. Основное тригонометрическое тождество. Тождество Эйлера. Бином Ньютона, радиус сходимости. Ряд для логарифма

Нахождения формулы для чисел Каталана через производящие функции и бином Ньютона.

16.05.2013 Формула Тэйлора для остаточного члена в форме Пеано. Ряд Тэйлора для обратных тригонометрических функций.

Задача 40. Обозначим через $\pi(x)$ — количество простых чисел меньше либо равных x. Докажите, что $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$. (Взятое наугад число с вероятностью 1 будет составним)?

Объяснение, почему естественно ожидать, что $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$.

Задача 41. Докажите, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log(n)$ имеет предел.

Оценивание этого предела. Константа Эйлера.

Задача 42. а) Докажите, что $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \ln 2$.
б) Докажите, что $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots = \dfrac{\pi}{4}$.