Занятие 2: метод математической индукции (дополнение)

Натуральные числа. Многие математические объекты описываются при помощи своих *определений.* Определение описывает объект в терминах ранее введённых понятий. Но что делать, например, с теми понятиями, на которые ссылается самое первое определение? Чтобы придать им смысл, используются *аксиомы.* Определение — это введение нового имени для какого-то объекта. Аксиома же — это утверждение об объектах, которое мы (в рамках нашей теории) считаем истинным.

В школьном курсе математики вы в какой-то мере уже сталкивались как минимум с двумя важными системами аксиом: с аксиомами евклидовой плоскости (на уроках геометрии) и с аксиомами коммутативного кольца (под этими словами скрываются известные вам по начальной школе переместительные, сочетательные и распределительный законы, а также некоторые свойства нуля и единицы). Именно система аксиом задаёт тот объект, который она описывает: все свойства этого объекта в конечном итоге сводятся к аксиомам.

Для того, чтобы придать смысл понятию натурального числа, оказывается, требуется всего лишь одна аксиома. Но перед тем, как её сформулировать, напомним пару терминов. *Отображение* $A \to B$ — правило[1], по которому каждому элементу множества A сопоставлен элемент множества B. *Последовательностью* элементов множества A мы будем называть[2] отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в A. Нам также будет удобно считать, что 0 — тоже натуральное число. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяется следующей аксиомой

Аксиома (Ловера). *Существуют множество $\mathbb{N}$, его элемент $0 \in \mathbb{N}$ и отображение $+1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любого отображения $f : X \to X$ и элемента $x \in X$ существует единственная последовательность a, для которой*

$$a_0 = x; \quad a_{n+1} = f(a_n).$$

Менее формально можно сформулировать эту аксиому так: если задан начальный элемент последовательности и задано правило, по которому из каждого элемента последовательности можно получить следующий, то задана вся последовательность (такой способ задания последовательности называется заданием при помощи *рекуррентного соотношения*).

Индукция. Покажем, как из аксиомы Ловера можно получить принцип индукции Пеано. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ — подмножество, содержащее 0 и вместе с каждым своим числом содержащее следующее. Тогда правило $f(n) = n + 1$ задаёт отображение $A \to A$. Зададим последовательность a соотношениями

$$a_0 = 0; \quad a_{n+1} = f(a_n).$$

Так как A — подмножество $\mathbb{N}$, то отображение $a : \mathbb{N} \to A$ можно рассматривать[3] как отображение $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что b удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению ($b_0 = 0$, $b_{n+1} = b_n + 1$), что и тождественное отображение[4]. Значит, по аксиоме Ловера, отображение b совпадает с тождественным. В частности, множество значений b (а, значит, и a) — всё $\mathbb{N}$.

Сложение. Операция «$x+$» прибавления числа x определяется рекуррентным соотношением

$$x + 0 = x; \quad x + (n + 1) = (x + n) + 1.$$

Почти «бесплатно» аксиома Ловера позволяет получить, например, сочетательный закон (попробуйте его доказать явно по индукции, исходя только из рекуррентного определения «$x+$»):

$$(x+y)+0 = x+y = x+(y+0); \quad (x+y)+(n+1) = ((x+y)+n)+1 \text{ и } x+(y+(n+1)) = x+((y+n)+1) = (x+(y+n))+1,$$

поэтому «$(x + y) + \square$» и «$x + (y + \square)$» — одна и та же операция.

Из сочетательного закона легко следует переместительный. Сперва докажем, что «$0+$» и «$+0$» — одно и то же:

$$0 + 0 = 0 = 0 + 0; \qquad 0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 \quad \text{и} \quad (n + 1) + 0 = n + 1 = (n + 0) + 1.$$

Дальше надо заметить, что «$1+$» и «$+1$» — одно и то же. Действительно,

$$1 + 0 = 1 = 0 + 1; \qquad 1 + (n + 1) = (1 + n) + 1 \quad \text{и} \quad (n + 1) + 1 = (n + 1) + 1.$$

Теперь нетрудно доказать, что и «$x+$» и «$+x$» одинаковы (обратите внимание, что в последней цепочке равенств сначала применён сочетательный закон, а затем эквивалентность операций «$+1$» и «$1+$»):

$$x + 0 = x = 0 + x; \qquad x + (n + 1) = (x + n) + 1 \quad \text{и} \quad (n + 1) + x = n + (1 + x) = n + (x + 1) = (n + x) + 1.$$

---

[1] Вообще говоря, слово «правило» требует уточнения во избежание парадоксов. Но это — тема отдельного разговора.

[2] На протяжении этого листка. Часто удобно бывает определять последовательность более общо.

[3] Если быть более точным, то $b(n) = i(a(n))$, где $i : A \to \mathbb{N}$ — каноническое вложение (отображение, сопоставляющее каждому элементу A этот же элемент в $\mathbb{N}$).

[4] Тождественным отображением на множестве X называется отображение $\mathrm{id} : X \to X$, отображающее каждый элемент X в себя, т.е. $\mathrm{id}(x) = x$.