Занятие 3: последовательности и рекурсия (дополнение)

Рекурсия: простая и сложная. Как было показано в основной части листка, рекуррентные соотношения бывают разные, и не все из них задают последовательность однозначно. Некоторые могут вообще не задавать ни одной последовательности. В этой части листка мы выделим важнейшие случаи, когда рекуррентное соотношение задаёт последовательность однозначно.

Первый и самый важный случай — *простая рекурсия.* Этим термином называются соотношения вида

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = f(a_n).$$

Существование и единственность последовательности, заданной таким способом, следует из аксиомы Ловера. И именно к этому частному случаю мы будем сводить более сложные формы рекурсии.

Произведение множеств. Для дальнейших действий нам понадобится важная теоретико - множественная операция. Вот её определение.

Определение. Пусть A и B — множества. Из *произведением* $A \times B$ называется множество всевозможных упорядоченных пар[1] (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

Пример. Функция сложения $f(x, y) = x + y$ — это отображение $A \times A \to A$ (где A — множество, на котором это сложение определено). Аргументы (x, y) функции f можно считать как парой элементов множества A, так и элементом множества $A \times A$.

В математике встречаются не только упорядоченные пары, но и упорядоченные тройки, четвёрки, ... Упорядоченную n-ку можно рассматривать[2] как элемент множества $(\ldots(A_1 \times A_2) \times A_3) \times \cdots) \times A_n$.

Сложная рекурсия I. Следующий член выражен не только через предыдущий, но ещё и через свой номер. Т.е. рекуррентное соотношение имеет вид

$$a_1 = x; \quad a_{n+1} = g(a_n, n).$$

Для того, чтобы свести этот случай к предыдущему, нам потребуется 2 «трюка». Первый: введём обозначение $b_n = n$. Второй: перейдём от множества A, на котором определена последовательность A, к множеству $A \times \mathbb{N}$. Теперь осталось заметить, что последовательность (a_n, b_n) задаётся соотношением

$$(a_1, b_1) = (x, 1); \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = (g(a_n, b_n), b_n + 1).$$

Сложная рекурсия II. Следующий член выражен через некоторое (фиксированное) количество предыдущих, т.е. рекуррентное соотношение имеет вид

$$a_1 = x_1, \ldots, a_k = x_k; \quad a_{n+k} = h(a_n, a_{n+1}, \ldots a_{n+k-1}).$$

Ситуация здесь не сильно сложнее, чем в предыдущем случае. Достаточно ввести обозначения $a_n^m = a_{n+m}$ и рассмотреть последовательность на множестве $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ множеств}}$. Тогда эта последовательность задаётся соотношениями

$$(a_1^0, \ldots a_1^{k-1}) = (x_1, \ldots x_k); \quad (a_{n+1}^0, \ldots, a_{n+1}^{k-2}, a_{n+1}^{k-1}) = (a_n^1, \ldots, a_n^{k-1}, h(a_n^0, \ldots, a_n^{k-1})).$$

Сложная рекурсия III. Следующий член выражен через все предыдущие, т.е. рекуррентное соотношение имеет вид

$$a_n = f(a_1, \ldots a_{n-1}).$$

Областью определения отображения f является множество (обозначим его $\mathcal{A}$) всех конечных последовательностей элементов A (в том числе, $a_1 = f()$, где $f()$ — значение функции f на пустой последовательности).

Для того, чтобы свести этот случай к простой рекурсии, введём хитрую функцию $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, «приписывающую» к конечной последовательности в конец значение f на этой последовательности:

$$F(a_1, \ldots a_n) = (a_1, \ldots a_n, f(a_1, \ldots a_n)).$$

Зададим последовательность b элементов $\mathcal{A}$ (т.е. последовательность конечных последовательностей элементов A) соотношением

$$b_1 = (); \quad b_{n+1} = F(b_n).$$

Осталось заметить, что a_n — последний член последовательности b_{n+1}.

---

[1] Упорядоченные пары (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

[2] Хотя оказывается более удобным рассматривать упорядоченную n-ку как конечную последовательность, т.е. отображение $\overline{1, n} \to \cup_i A_i$ диапазона натуральных чисел от 1 до n в объединение множеств A_i.