Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 3: последовательности и рекурсия

Определение. Если каждому натуральному числу по некоторому правилу сопоставлен элемент множества X, то говорят, что задана *последовательность* элементов множества X

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

(В последовательности x каждому натуральному числу n сопоставлен элемент x_n.)

Пример. Приведём примеры последовательностей:

а) Для последовательности $a\colon 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ имеем: $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, \ldots, a_n = n+1$. Мы видим, что последовательность a задается правилом $n \mapsto n+1$.

б) Последовательность $b\colon 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ можно задать правилом $b_n = n^2$ или $n \mapsto n^2$.

1) Напишите формулу, задающую последовательность $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$

2) Напишите формулу, задающую последовательность $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

3) Напишите формулу, задающую последовательность $9, 16, 25, 36, 49, \ldots$

Замечание. Последовательности можно задавать не только формулой. Иногда удобнее их задавать при помощи *рекурсии.*

Определение. Формулы, выражающие каждый член последовательности через предыдущие, называются *рекуррентными соотношениями.*

Пример. Приведём примеры рекуррентных соотношений:

а) $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Так задаётся последовательность Фибоначчи.[1]

б) $f_1 = 1$, $f_{n+1} = (n+1) + f_n$. Так задаётся сумма $f_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

в) $f_{n+1} = f_n$. Так задаётся постоянная последовательность (не однозначно).

г) $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+1} = f_n^2$. А вот это соотношение не задаёт вообще ни одной последовательности.

д) $c_0 = 1$, $c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \cdots + c_k c_{n-k} + \cdots + c_n c_0$. Так задаётся последовательность Каталана.[2]

4) Задайте последовательность $0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; 0,33333; 0,333333; \ldots$ рекуррентно.

5) Андрей посмотрел на свои оценки по математике и ужаснулся: $5; 2; 5; 2; 5; 2; 5; \ldots$ Задайте рекуррентно и формулой последовательность его текущих (и ожидаемых в будущем) оценок.

6) Последовательность задана рекуррентно: $s_1 = 1$, $s_{n+1} = |2s_n - 11|$. Найдите s_{1543}.

7) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 5$. Докажите по индукции, что члены этой последовательность вычисляются по следующей формуле: $a_n = 2 + 5(n-1)$.

8) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$. Докажите по индукции, что члены этой последовательность вычисляются по следующей формуле: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

9) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$, $n \geq 2$. Докажите по индукции, что члены этой последовательность вычисляются по следующей формуле: $a_n = 3^n - 2^n$.

10*) Вычислите первые несколько членов последовательности

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Да, как ни странно, но это та самая знакомая вам последовательность! (Какая?) Докажите это.

---

[1] Числа Фибоначчи задают количество пар кроликов через n месяцев после начала процесса размножения, если кролики размножаются по следующему закону: каждая молодая пара кроликов через месяц становится способной к размножению, каждая способная к размножению пара каждый месяц рожает молодую пару. Изначально есть одна молодая пара.

[2] Числа Каталана часто встречаются в комбинаторике. Например, можно рассматривать c_n как количество способов правильно расставить в строчку n пар скобок.