Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 8: сравнения

Пусть a, b и n — целые числа, причем $n \neq 0$.

Определение. Числа a и b *сравнимы* по модулю n, если $n \mid a - b$. Пишут: $a \equiv b \pmod{n}$.

1) Докажите, что сравнимость по модулю n является отношением эквивалентности. Что является одинаковым у сравнимых чисел?

2) Докажите, что для любых целых a_1, a_2, b_1, b_2, n верны следующие утверждения:
а) из $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ следует $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$;
б) из $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ следует $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n}$.

3) По индукции докажите, что если $a \equiv b \pmod{n}$, то
а) $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ для любого натурального k;
б) для любого многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$.

4) Верно ли, что если $a \equiv b \pmod{n}$ и $a, b \geqslant 0$, то $2^a \equiv 2^b \pmod{n}$?

5) Пусть $k \neq 0$. Докажите, что
а) $a \equiv b \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $ka \equiv kb \pmod{kn}$;
б) если $ka \equiv kb \pmod{n}$ и числа k и n взаимно просты, то $a \equiv b \pmod{n}$ (лемма Евклида для сравнений).

6) Пусть $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ — десятичная запись числа x. Докажите, что
а) $x \equiv a_0 + \ldots + a_n \pmod{3}$, $\quad x \equiv a_0 + \ldots + a_n \pmod{9}$;
б) $x \equiv a_0 \pmod{2}$, $x \equiv a_0 \pmod{5}$;
в) $x \equiv a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

7) Докажите, что если x нечетно, то $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

8) Решите сравнения (найдите класс эквивалентности числа x)
а) $3x \equiv 1 \pmod{7}$; б) $6x \equiv 5 \pmod{9}$; в) $4x \equiv 2 \pmod{10}$; г) $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 8: сравнения

Пусть a, b и n — целые числа, причем $n \neq 0$.

Определение. Числа a и b *сравнимы* по модулю n, если $n \mid a - b$. Пишут: $a \equiv b \pmod{n}$.

1) Докажите, что сравнимость по модулю n является отношением эквивалентности. Что является одинаковым у сравнимых чисел?

2) Докажите, что для любых целых a_1, a_2, b_1, b_2, n верны следующие утверждения:
а) из $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ следует $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$;
б) из $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ следует $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n}$.

3) По индукции докажите, что если $a \equiv b \pmod{n}$, то
а) $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ для любого натурального k;
б) для любого многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$.

4) Верно ли, что если $a \equiv b \pmod{n}$ и $a, b \geqslant 0$, то $2^a \equiv 2^b \pmod{n}$?

5) Пусть $k \neq 0$. Докажите, что
а) $a \equiv b \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $ka \equiv kb \pmod{kn}$;
б) если $ka \equiv kb \pmod{n}$ и числа k и n взаимно просты, то $a \equiv b \pmod{n}$ (лемма Евклида для сравнений).

6) Пусть $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ — десятичная запись числа x. Докажите, что
а) $x \equiv a_0 + \ldots + a_n \pmod{3}$, $\quad x \equiv a_0 + \ldots + a_n \pmod{9}$;
б) $x \equiv a_0 \pmod{2}$, $x \equiv a_0 \pmod{5}$;
в) $x \equiv a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

7) Докажите, что если x нечетно, то $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

8) Решите сравнения (найдите класс эквивалентности числа x)
а) $3x \equiv 1 \pmod{7}$; б) $6x \equiv 5 \pmod{9}$; в) $4x \equiv 2 \pmod{10}$; г) $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.