

Касательные, биссекриссы и четырёхугольники в окружности

1. Дана окружность и точка A вне её; AB и AC — касательные к окружности (B и C — точки касания). Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.
2. Все углы треугольника ABC меньше 120° . Докажите, что внутри него существует точка, из которой все стороны треугольника видны
3. под углом 120° градусов (точка Торричелли)
4. Из точки P , лежащей внутри треугольника ABC , опустим перпендикуляры PA_1 , PB_1 и PC_1 на его стороны. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется педальным треугольником треугольника ABC для педальной точки P . Опустив из той же точки P перпендикуляры на стороны треугольника $A_1B_1C_1$, получим второй педальный треугольник. А затем третий. Так вот, третий педальный треугольник подобен исходному. Докажите это.
5. Теорема Штейнера-Лемуса. Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный. Указание: Докажите две леммы: 1) Если две хорды окружности стягивают различные острые углы с вершинами на этой окружности, то меньшему углу соответствует меньшая хорда. 2) В треугольнике с двумя различными углами меньший угол обладает большей биссектрисой.

Домашнее задание на 15.09

1. Внутри четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка M так, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если угол CBM равен углу CDM , то угол ACD равен углу BCM .
2. Указание. Отметьте такую точку N , что $BMCN$ — параллелограмм.
3. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность, и на дуге BC взята произвольная точка M . Тогда $AM = BM + CM$. (Указание: Отложите на отрезке MA отрезок $MK = MB$.)
4. В точке M данной окружности проведена касательная MB и хорда MA . Докажите, что MB и MA находятся на равном расстоянии от середины дуги MA .
5. Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекают описанную окружность в одной и той же точке.
6. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны BC , а) принадлежит описанной окружности; б) диаметрально противоположна вершине A .