Комбинаторика

Количество элементов в множестве

Количество элементов в множестве A обозначается $|A|$ или $\#A$. Достаточно часто, вместо “количество элементов” мы будем говорить слово “мощность”.

Пример. **(формула включений–исключений)**

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - \\
&- |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + \\
&+ |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем только второе равенство, используя первое.

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = \\
= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)| =
\end{aligned}$$

откуда, учитывая что $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, получаем

$$\begin{aligned}
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |B \cap C| - |(A \cap B) \cap (B \cap C)|) = \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$ ■

Сейчас мы рассмотрим следующую идею:

> *если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.*

Утверждение. Количество k-элементных подмножеств n-элементного множества совпадает с количеством последовательностей длины n из 0 и 1, в которых ровно k единиц.

Доказательство. Занумеруем элементы нашего множества: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Каждому подмножеству сопоставим следующую последовательность длины n из 0 и 1: если a_i лежит в подмножестве, то на i-ом месте ставим 1, иначе — 0.[1]

Очевидно, что такое соответствие взаимно однозначно сопоставляет k-элементные подмножества последовательностям с ровно k единицами. ■

Утверждение. Количество подмножеств n-элементного множества равно 2^n.

Доказательство. Заметим, что из решения предыдущего утверждения следует, что количество подмножеств совпадает с количеством последовательностей длины n из 0 и 1. Легко посчитать, что их ровно 2^n. ■

Определение. *Числом сочетаний из n элементов по k* называется количество k-элементных подмножеств n-элементного множества.

Обозначение. C_n^k (читается как “цэ из эн по ка”) или $\binom{n}{k}$,

Замечание. Число сочетаний имеет комбинаторный смысл: это количество способов выбрать из n предметов k без учета порядка.

Пример. 1. Количество способов выгнать из класса, в котором сидит 23 человека, пятерых равно C_{23}^5.

---

[1] При таком сопоставлении последовательности называют *характеристическими.*

2. Легко проверить, что C_5^3 равно 10: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$ и $\{3,4,5\}$ — все трехэлементные подмножества $\{1,2,3,4,5\}$.

Бином Ньютона

В данном разделе мы хотим научиться раскрывать скобки в выражении $(a+b)^n$.

Для начала вспомним, что $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ раз}}$ и, после раскрытия скобок, все одночлены будут иметь вид $a^i b^{n-i}$, где i может принимать значения от 0 до n. Стало быть,

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + \ldots + c_i a^{n-i} b^i + \ldots + c_n b^n$$

для некоторых коэффициентов c_i.

Заметим также, что тогда $(b+a)^n = c_0 b^n + c_1 b^{n-1} a + \ldots + c_n a^n$, но $(a+b)^n = (b+a)^n$, откуда, сравнивая коэффициенты при $a^i b^{n-i}$ в обоих выражениях, можно сразу получить, что $c_i = c_{n-i}$.

Утверждение. **(бином Ньютона)**

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^i a^{n-i} b^i + \ldots + C_n^n b^n.$$

Доказательство. Раскроем скобки в выражении $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$, но пока не будем приводить подобные слагаемые.

Посмотрим, как может получиться одночлен $a^{n-i}b^i$. Для этого, в выражении $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ мы должны выбрать i скобок, из которых мы возьмем b (тогда из остальных $n-i$ скобок мы возьмем a). Сделать это можно C_n^i способами. ■

Заметим, что из бинома и наблюдения выше ($c_i = c_{n-i}$) следует, что $C_n^i = C_n^{n-i}$.

Воспользуемся теперь биномом Ньютона для доказательства следующего
Утверждение. $C_{n+1}^i = C_n^i + C_n^{i-1}$
Доказательство.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= C_{n+1}^0 a^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^i a^{(n+1)-i} b^i + \ldots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}\\
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = (C_n^0 a^n + \ldots + C_n^i a^{n-i} b^i + \ldots + C_n^n b^n)(a+b) =\\
&= C_n^0 a^{n+1} + \ldots + C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \ldots + C_n^n a b^n +\\
&+ C_n^0 a^n b + \ldots + C_n^i a^{n-i} b^{i+1} + \ldots + C_n^n b^{n+1} =\\
&= C_n^0 a^{n+1} + \ldots + C_n^i a^{(n+1)-i} b^i + \ldots + C_n^n a b^n +\\
&+ C_n^0 a^n b + \ldots + C_n^{i-1} a^{(n+1)-i} b^i + \ldots + C_n^n b^{n+1} =\\
&= C_n^0 a^{n+1} + \ldots + (C_n^i + C_n^{i-1}) a^{(n+1)-i} b^i + \ldots + C_n^n b^{n+1}
\end{aligned}$$

Откуда, сравнивая коэффициенты при $a^{(n+1)-i}b^i$, получаем требуемое. ■

Замечание. Учитывая бином Ньютона, числа сочетаний достаточно часто называют *биномиальными коэффициентами.*

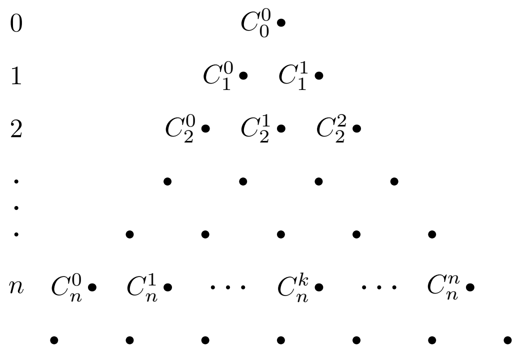
Треугольник Паскаля

Рассмотрим несколько способов заполнения треугольной решетки.

1. В k-ое место n-ой строки (и строки, и места в них нумеруются с нуля) стоит число C_n^k (см. рис).

2. На 0м и последнем местах каждой строки стоят единицы, а любое другое число равняется сумме двух, стоящих в предыдущей строке левее и правее выбранного.

3. Каждое число равняется количеству способов добраться из вершины, двигаясь только вправо-вниз и влево-вниз.



Мы хотим доказать, что на самом деле эти три способа дают одинаковый результат.

Для начала заметим, что совпадают 1ый и 2ой способы. Действительно, заметим, что $C_n^0 = C_n^n = 1$ и $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, поэтому в 1ом способе на 0м и последнем местах каждой строки стоят единицы, а любое другое число равняется сумме двух, стоящих в предыдущей строке левее и правее выбранного.

Теперь докажем, что совпадают 1ый и 3ий способы. Для этого докажем, что количество способов добраться до k-ого места n-ой строки ровно C_n^k. Заметим, что любой такой путь содержит ровно n ходов (так как за 1 ход мы увеличиваем номер строки, в которой находимся, на 1), притом из них ровно k раз мы ходили вправо-вниз, а остальные $n-k$ — влево вниз. Количество способов выбрать из n ходов те k, когда мы будем ходить вправо-вниз как раз и равно C_n^k.

Из 2ого способа легко видеть, что треугольник Паскаля симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей через его вершину, и мы еще раз получаем, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Упражнение. Выпишите треугольник Паскаля до 6ой строки.

Выделение элемента

Сейчас мы рассмотрим еще одну идею устанавливать соответствие между подмножествами некоего множества.

> *Зафиксируем какой-то элемент x из нашего множества. Тогда все подмножества разбиваются на пары $A \setminus \{x\}$ и $A \cup \{x\}$ (то есть подмножества отличаются только наличием-отсутствием элемента x).*

Утверждение. $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Доказательство. Зафиксируем некий элемент x. Все k-элементные подмножества $n+1$-элементного множества делятся на 2 типа: в них либо есть x (таких, как несложно понять, C_n^{k-1} (поскольку оставшиеся элементы каждого такого подмножества — суть $k-1$-элементные подмножества n-элементного множества)), либо его нет (их C_n^k). ∎