Разбор

1.1. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Решение. *Первое решение.* По определению, C_n^k — это количество k–элементных подмножеств n–элементного множества. Это наводит на мысль о следующем решении.

Пусть исходное n-элементное множество $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим два множества: первое будет состоять из всех k–элементных подмножеств множества A, а второе — из всех $n-k$–элементных. Устроим между этими множествами взаимно однозначное соответствие.

Сопоставим каждому k–элементному подмножеству $B \subset A$ его *дополнение* $A \setminus B$ — $n-k$–элементное подмножество. Осталось показать, что это соответствие является взаимно однозначным. Для этого достаточно заметить, что каждому $n-k$–элементному подмножеству C соответствует его дополнение $A \setminus C$ (это рассуждение показывает, что каждому что-то да соответствует и притом ровно одно).

Учитывая, что в первом множестве ровно C_n^k элементов, а во втором — C_n^{n-k}, получаем требуемое.

Второе решение. На лекции было доказано, что C_n^k равно количеству полследовательностей длины n из 0 и 1, содержащих ровно k единиц.

Рассмотрим два множества: одно состоит из всех последовательностей (длины n), содержащих ровно k единиц, а другое – содержащих ровно $n-k$ единиц. Установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие.

Последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ сопоставим последовательность $(1-a_1, 1-a_2, \dots, 1-a_n)$ (то есть заменим все 1 на 0, а все 0 на 1). Можно показать, что полученное сопоставление задает взаимно однозначное соответствие между нашими двумя множествами.

Дальнейшее аналогичному первому решению.

1.2. Найдите количество чисел, не превосходящих 120, и a) делящихся на 2 или на 3; b) делящихся на 2, на 3 или на 5.

a) Ответ. 80 . Решение. Обозначим через A_k множество чисел, не превосходящих 120, которые делятся на k.

Нам нужно найти мощность объединения $|A_2 \cup A_3|$. По формуле включений–исключений получаем

$$|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|.$$

В пересечении A_2 и A_3 лежат числа, которые делятся на 2 и на 3, стало быть, делятся на 6 и $A_2 \cap A_3 = A_6$. Учитывая, что $|A_2| = 60$, $|A_3| = 40$, $|A_6| = 20$, получаем $|A_2 \cup A_3| = 60 + 40 - 20 = 80$.

b) Ответ. 88 . Решение. Аналогично решению пункта a) получаем

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_5| - |A_5 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \\ &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_{15}| - |A_{10}| + |A_{30}| = \\ &= 60 + 40 + 24 - 20 - 8 - 12 + 4 = 88. \end{aligned}$$

1.3. Самый высокий математик среди шахматистов и самый высокий шахматист среди математиков — всегда ли это один и тот же человек?

Ответ. Да. Решение. Этот человек — самый высокий человек среди людей, которые одновременно являются и математиками, и шахматистами.

1.4. Докажите, что среди чисел, меньших 1000, поровну чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 12.

Решение. Рассмотрим два множества: первое будет состоять из всех чисел, меньших 1000, с суммой цифр 15, второе — с суммой цифр 12. Установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие.

Числу $\overline{abc}$ (a, b и c — произвольные цифры, то есть на первом месте может стоять ноль) сопоставим число $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)}$. Заметим, что сумма цифр этих двух чисел равна 27 ($a + b + c + (9-a) + (9-b) + (9-c) = 27$). Значит, это сопоставление ставит во взаимно однозначное соответствие числа с суммой 12 и 15.

Дальнейшее очевидно.

1.5. Сколько существует шестизначных чисел, в которых нет двух рядом стоящих одинаковых цифр?

Ответ. 9^6. Решение. На первом месте у нас может стоять одна из 9 цифр (все, кроме 0).

Для каждого из этих 9 вариантов есть 9 вариантов, какая цифра может стоять на втором месте (всего 10 цифр, но мы не можем использовать ту, что поставили на первое место). Таким образом, поставить цифры на первые два места есть 9^2 вариантов.

Для каждого из этих 9^2 вариантов есть 9 вариантов, какая цифра может стоять на третьем месте, поэтому поставить цифры на первые три места есть 9^3 вариантов.

И так далее, получаем, что на все шесть мест есть 9^6 вариантов.

1.6. Костя пытается составить ”антимагический” квадрат 4×4 из чисел: -1, 0, 1, т. е. такой, что суммы чисел по вертикалям, горизонталям и двум диагоналям различны. Удастся ли это ему?

Ответ. Нет. Решение. Заметим, что суммы могут меняться от -4 до 4, то есть всего 9 вариантов, в то время как нам требуется 10 различных сумм.

1.7. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. a) Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду. b) Верно ли утверждение пункта a), если детей 49?

Ответ. b) Нет, неверно. Решение. Заметим, что найдется ряд, в котором на утреннем сеанса сидели хотя бы 8 детей (если это не так, то на каждом ряду сидело не более 7, рядов 7, значит детей не более 49). Тогда вечером, какие двое из этих детей снова окажутся в одном ряду (так как иначе в каждом ряду будет сидеть не более 1 из этих детей, рядов 7, значит их было не более 7). b) Пример можно придумать самостоятельно.

1.8. Решите в целых числах уравнение $xy - x - y = 5$.

Ответ. $(-5, 0)$, $(-2, -1)$, $(-1, -2)$, $(0, -5)$, $(2, 7)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(7, 2)$. Решение. Добавим к обеим частям уравнения по 1. Тогда, после разложения на множители будем иметь: $(x - 1)(y - 1) = 6$. Поскольку x и y — целые, то перебирая варианты разложить 6 в произведение двух целых чисел, получаем ответ.