Метод математической индукции

Для читателя: если вам надо просто решить задачу на метод математической индукции, то рекомендуем сразу перейти к разделу “Пример с пояснениями”.

Пример. Сумма чисел от 1 до n равна $n(n+1)/2$.

Доказательство. Утверждение верно для $n = 1$: действительно, $1 = 1 \cdot (1+1)/2$.

Предположим теперь, что утверждение верно для $n = k$ (то есть, что сумма чисел от 1 до k равна $k(k+1)/2$). Докажем его для $n = k+1$ (то есть, что сумма чисел от 1 до $k+1$ равна $(k+1)(k+2)/2$). Действительно,

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Первое равенство следует из предположения о том, что утверждение верно для $n = k$, второе — просто результат преобразований. ■

Проверка утверждения для $n = 1$ называется *базой* индукции.

Проверка того, что из утверждения для $n = k$ следует утверждение для $n = k+1$ называется *переходом* индукции.

Принцип наименьшего числа

Строго метод математической индукции можно сформулировать так:

(Аксиома индукции) Пусть A — некоторое подмножество натуральных чисел. Притом выполнены следующие два условия:

- $1 \in A$;
- из того, что $k \in A$ следует, что $k+1 \in A$.

Тогда A совпадает с множеством натуральных чисел.

(Принцип наименьшего числа) Во всяком непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьший элемент.

Утверждение. Из принципа наименьшего числа следует аксиома индукции.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ и для A выполнены условия из аксиомы индукции. Нам надо доказать, что $A = \mathbb{N}$.

Предположим, что это не так и рассмотрим множество $B = \mathbb{N} \setminus A \neq \varnothing$.

Так как B непусто, то в нем есть наименьший элемент, пусть он равен x. Заметим, что $x \neq 1$ (т.к. $1 \in A$). Тогда рассмотрим (натуральное) число $x-1$: оно меньше, чем x и, стало быть, не принадлежит B. Значит, $x - 1 \in A$ и, по свойству для множества A тогда $(x-1)+1 = x \in A$, что противоречит тому, что $x \in B$.

Значит, наше предположение неверно и $A = \mathbb{N}$. ■

Утверждение. Из аксиомы индукции следует принцип наименьшего числа.

Доказательство. Рассмотрим некоторое непустое подмножество A натуральных чисел. Предположим, что в нем нет наименьшего элемента. Рассмотрим множество $B = \mathbb{N} \setminus A$.

Заметим, что $1 \in B$, так как если $1 \in A$, то 1 — наименьший элемент множества A.

Предположим теперь, что $k \in B$. Тогда $1, 2, \ldots, k \in B$ (если нет, то рассмотрим наименьшее из этих чисел, что не принадлежат B (так как их конечно, то по индукции можно доказать, что оно существует) и тогда оно будет наименьшим элементом в A). Тогда $k+1 \in B$, так как иначе $k+1$ — наименьший элемент множества A.

Тогда для множества B выполнены условия аксиомы индукции и $B = \mathbb{N}$. Значит, $A = \varnothing$. Значит, наше предположение неверно и в A есть наименьший элемент. ■

Пример с пояснениями

Решим следующую задачу.

На плоскости проведены $n \geqslant 3$ прямых, не все из которых проходят через одну точку и никакие две из которых не параллельны. Докажите, что одна из частей, на которые они делят плоскость — треугольник.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по числу прямых.[1]

База: $n = 3$.

Рассмотрим какие-нибудь две прямые, по условию они пересекаются. Третья прямая, по условию, пересекает обе эти прямые и не проходит через точку их пересеченя. Образовались три точки пересечения, которые являются вершинами треугольника.

Переход: $n = k \longrightarrow n = k + 1$

Предположение индукции. Если на плоскости проведены k прямых, не все из которых проходят через одну точку и никакие две из которых не параллельны, то одна из частей, на которые они делят плоскость — треугольник.

На плоскости сейчас нарисованы $k + 1$ прямая.[2]

Выберем какие-нибудь две из них и выберем третью, которая не проходит через точку пересечения первых двух (такие есть по условию). Из оставшихся прямых (коих будет $(k+1) - 3 = k - 2$) выкинем любую другую.

Проверим, что для оставшихся k прямых выполнены условия задачи.[3]

Действительно, никакие две прямые не могли стать параллельными. Условие про то, что не все они проходят через одну точку гарантируется уже тремя выбранными прямыми.

Сейчас на плоскости k прямых, для которых выполнены условия задачи. Тогда, по *предположению индукции*[4], одна из образовавшихся частей — треугольник. Вернем выброшенную прямую. Если она не пересекает этот треугольник, то тогда он останется и утверждение доказано. Если же пересекает, то тогда образуется новый треугольник и вновь утверждение доказано. ■

[1] Параметр индукции.

[2] Именно так, а не k, к которым мы добавляем еще одну.

[3] Именно для того, чтобы эти условия были выполнены мы и выбирали, какую именно прямую надо выбросить.

[4] Эта милая фраза напоминает нам, что утверждение верно для $n = k$

Еще немного о методе математической индукции

Напомним, что строго метод математической индукции мы сформулировали так (чтобы понять, какое отношение это имеет к доказательству задач по индукции, надо понять, что A — это множество тех n, для которых верно доказываемое утверждение).

(Аксиома индукции) Пусть A — некоторое подмножество натуральных чисел. Притом выполнены следующие два условия:

- $1 \in A$;
- из того, что $k \in A$ следует, что $k + 1 \in A$.

Тогда A совпадает с множеством натуральных чисел.

Также напомним следующий

(Принцип наименьшего числа) Во всяком непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьший элемент.

Однако как мы уже видели на некоторых задачах, порой нужно применять индукцию, опираясь на два предыдущих утверждения. Тогда нам понадобиться следующее утверждение:

Пусть A — некоторое подмножество натуральных чисел. Притом выполнены следующие два условия:

- $1,\ 2 \in A$;
- из того, что $k - 1,\ k \in A$ следует, что $k + 1 \in A$.

Тогда A совпадает с множеством натуральных чисел.

Докажем это утверждение, опираясь на принцип наименьшего числа.

Доказательство. Предположим, что это не так ($A \neq \mathbb{N}$) и рассмотрим множество $B = \mathbb{N} \setminus A \neq \varnothing$.

Так как B непусто, то в нем есть наименьший элемент, пусть он равен x. Заметим, что $x \neq 1,\ 2$ (т.к. $1,\ 2 \in A$) . Тогда рассмотрим (натуральные) числа $x - 2,\ x - 1$: они меньше, чем x и, стало быть, не принадлежат B. Значит, $x-2,\ x-1 \in A$ и, по свойству для множества A тогда $(x - 1) + 1 = x \in A$, что противоречит тому, что $x \in B$.

Значит, наше предположение неверно и $A = \mathbb{N}$. ■

Замечание. Наименьший элемент множества B по сути — это наименьшее такое n, что утверждение с номером n не выполнено.

Но и это еще не все, порой нужно применять индукцию, опираясь на все предыдущие утверждения. Тогда утверждение будет звучать так:

Пусть A — некоторое подмножество натуральных чисел. Притом выполнены следующие два условия:

- $1 \in A$;
- из того, что $1,\ 2,\ \ldots,\ k \in A$ следует, что $k + 1 \in A$.

Тогда A совпадает с множеством натуральных чисел.

Доказательство. Предположим, что это не так ($A \neq \mathbb{N}$) и рассмотрим множество $B = \mathbb{N} \setminus A \neq \varnothing$.

Так как B непусто, то в нем есть наименьший элемент, пусть он равен x. Заметим, что $x \neq 1$ (т.к. $1 \in A$) . Тогда рассмотрим (натуральные) числа $1,\ 2,\ \ldots,\ x - 1$: они меньше, чем x и, стало быть, не принадлежат B. Значит, $1,\ 2,\ \ldots,\ x - 1 \in A$ и, по свойству для множества A тогда $(x - 1) + 1 = x \in A$, что противоречит тому, что $x \in B$.

Значит, наше предположение неверно и $A = \mathbb{N}$. ■