## Разбор

**2.1.** Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Решение. Посчитаем количество подмножеств $n$–элементного множества.

С одной стороны, оно равно $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ (количество 0–элементных плюс количество 1–элементных плюс и так далее плюс количество $n$–элементных).

С другой стороны, на лекции было доказано, что количество подмножеств $n$–элементного множества равно $2^n$.

**2.2.** Сколькими способами можно разделить 10 человек на две команды по 5 человек?

Ответ. $C_{10}^5/2$. Решение. Давайте для начала выберем первую команду из 5 человек. Это можно сделать $C_{10}^5$ способами.

Тогда вторая команда определится однозначно. Давайте теперь посмотрим на какой-то вариант разделить 10 человек на две команды: команда $A$ и команда $B$. Заметим, что этот вариант мы посчитали два раза: первый раз, когда первой командой была $A$, а второй — $B$; второй раз, когда первой командой была $B$, а второй — $A$.

Таким образом **каждый** вариант мы посчитали два раза, поэтому $C_{10}^5$ нужно поделить на 2.

**2.3.** a) Найдите явную формулу для $C_n^2$. b) Найдите явную формулу для $C_n^3$.

Ответ. a) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; b) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$. *См. решение задачи 3.1.*

**2.4.** В одном доме живут 9 мальчиков и одна девочка. Назовем «компанией» любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки? На сколько?

Ответ. с девочкой на 9. Решение. Заметим, что если в компанию без девочки добавить девочку, то компания останется компанией.

Однако, обратное неверно. Если из компании с девочкой убрать девочку, то в случаях, когда останется один мальчик, компания перестанет быть компанией. Таких ситуаций ровно 9, откуда и следует ответ.

**2.7.** Докажите, что $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$ (иными словами, количество подмножеств с нечётным числом элементов равно количеству подмножеств с чётным числом элементов).

Решение. *Первое решение.* Давайте посмотрим на $n$–ую строчку треугольника Паскаля. Напомнии, что по одному из определений, в этой срочке стоят числа $C_n^0$, $C_n^1$, …, $C_n^n$.

Давайте разобьем предыдущую, $n-1$–ую строчку следующим образом:

$$C_{n-1}^0 \mid C_{n-1}^1 \;\; C_{n-1}^2 \mid C_{n-1}^3 \;\; C_{n-1}^4 \mid \ldots$$

(в конце, в зависимости от четности $n$, может быть или $\ldots \mid C_{n-1}^{n-1}$, или $\ldots \mid C_{n-1}^{n-2} \;\; C_{n-1}^{n-1}$).

Заметим, что сумма чисел в каждой паре (или просто отдельное число) будет равно (по другому определению треугольника Паскаля, что каждое число равно сумме двух над ним) $C_n^k$, где $k$ — некое четное число.

Таким образом, сумма всех "четных" биномиальных коэффициентов $n$–ой строки будет равна сумме всех биномиальных коэффициентов из $n-1$–ой строки.

Аналогично, разобив $n-1$–ую строчку другим образом:

$$C_{n-1}^0 \;\; C_{n-1}^1 \mid C_{n-1}^2 \;\; C_{n-1}^3 \mid \ldots,$$

можно получить, что сумма чисел всех "нечетных" биномиальных коэффициентов $n$–ой строки также равна сумме всех биномиальных коэффициентов из $n-1$–ой строки, откуда и следует утверждение.

*Второе решение.* Заметим, что в левой части равенства стоит количество подмножест $n$–элементного множества с нечетным числом элементов, а справа — с четным.

Рассмотрим два множества: первое состоит из всех "четных" подмножеств $n$–элементного множества, второе — из всех "нечетных". Установим между ними взаимно однозначное соответствие.

Для этого давайте выделим какой-нибудь элемент в исходном множестве и разобьем все подмножества на пары, отличающиеся только по наличию этого элемента. Тогда количество элементов в этих множествах отличается ровно на 1 и, поэтому, имеет разную четность. Именно так и мы установим взаимно однозначное соответствие между нашими двумя множествами.

Дальнейшее очевидно.

Замечание. Также смотри решение задачи 4.4.