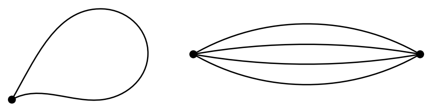
Графы

Основные определения

Определение. Будем говорить, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про каждую пару различных вершин известно, связаны они ребром или нет.

Замечание. 1. Это определение не рассматривает графы с *петлями* — ребрами, начинающимися и заканчивающимися в одной и той же вершине и *кратными ребрами* — ситуации, при которой между двумя вершинами может быть несколько ребер.

2. Учитывая определение, при введении графа важно назвать, что будет его вершинами и при каких условиях мы будем соединять вершины ребрами.



3. Иногда вместо фразы "из вершины выходит ребро" мы будем говорить "ребро и вершина *инцидентны*".

Определение. *Степенью* вершины называется число инцидентных ей ребер (число выходящих из нее ребер). При этом в случае с петлей ребро учитывается дважды.

Утверждение. Сумма степеней всех вершин в графе равна удвоенному числу ребер этого графа.

Доказательство. Посчитаем двумя способами количество пар "вершина–инцидентное ей ребро" (петлю учтем дважды). С одной стороны, это количество равно удвоенному числу ребер (так как каждое ребро добавляет в него двойку). С другой стороны, оно равно сумме степеней всех вершин, откуда и следует утверждение. ■

Следствие. **(лемма о рукопожатиях)** В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Доказательство. Другое доказательство:

Будем доказывать индукцией по числу ребер следующее утверждение: в любом графе с n ребрами число вершин нечетной степени четно.

База: $n = 0$

Если в графе нет ребер, то степени всех вершин равны 0 и число вершин нечетной степени равно 0, то есть четно.

Переход: $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. В любом графе с k ребрами число вершин нечетной степени четно.

Рассмотрим граф с $k+1$ ребром. Выкинем из него любое ребро. Тогда в оставшемся графе будет k ребер и, по предположению индукцию, число вершин нечетной степени в нем четно.

Вернем выброшенное ребро и посмотрим, как могли измениться степени вершин. Вершины, которые не инцидентны нашему ребру, очевидно, не поменялись. Степени же вершин, инцидентных ему, увеличились на 1. Несложный перебор показывает, что при этом количество вершин нечетной степени либо не изменилось, либо изменилось на 2, поэтому четность числа вершин нечетной степени не изменилась. По предположению индукции оно было четным, значит четным оно и осталось. ■

Замечание. Величина, которая не меняется при некотором процессе, называется *инвариантом.* В приведенном выше доказательстве инвариантом является четность числа вершин нечетной степени.

Пути и циклы[1]

Определение. Последовательность вершин и ребер v_0, e_1, v_1, $\ldots$, v_{n-1}, e_n, v_n называется *маршрутом*, если для $1 \leqslant i \leqslant n$ ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i. Указанный маршрут соединяет вершины v_0 и v_n. Число n в данном случае называется *длиной* маршрута. Если $v_0 = v_n$, то маршрут называют *замкнутым*.

Маршрут называется *путем*, если все его ребра различны, и *простым путем*, если все его вершины (а значит, и ребра) различны.

Замкнутый путь называется *циклом*. Цикл называется *простым циклом*, если все его вершины (кроме v_0 и v_n) различны.

Замечание. Достаточно часто маршрут из v_0 в v_n мы будем просто обозначать $v_0 v_1 \ldots v_n$ (наличие ребер при этом подразумевается).

Утверждение. Пусть в графе существует маршрут между вершинами A и B. Тогда между ними существует простой путь.

Доказательство. Рассмотрим маршрут наименьшей длины из A в B, пусть это $A{=}v_0 v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_n{=}B$.

Предположим, что он не является простым путем, то есть существуют такие k и l, что $k < l$ и $v_k = v_l$. Но тогда маршрут $A{=}v_0 v_1 \ldots v_k v_{l+1} \ldots v_{n-1} v_n{=}B$ является маршрутом из A в B, меньшим по длине, противоречие. ■

Утверждение. Пусть в графе существует цикл, проходящий через вершину A. Тогда в графе есть простой цикл, проходящий через вершину A.

Доказательство. Рассмотрим наименьший по длине цикл, проходящий через A: пусть это $A{=}v_0 v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_n{=}A$.

Пусть он не является простым, то есть существуют такие k и l, что $k < l$, $l \neq n$ и $v_k = v_l$. Тогда рассмотрим цикл (почему это цикл?) $A{=}v_1 \ldots v_k v_{l+1} \ldots v_n{=}A$, он будет проходить через A и иметь меньшую длину. Противоречие. ■

Следствие. Если в графе есть цикл, то в графе есть простой цикл.

Доказательство. Другое доказательство:

Пусть $v_0 \ldots v_n$ — цикл. Рассмотрим первую повторившуюся вершину v_l. То есть раньше есть $v_k = v_l$. Тогда можно (и нужно!) показать, что $v_k \ldots v_l$ — простой цикл. ■

Связность

Определение. Граф называется *связным*, если для любой пары его вершин между ними есть маршрут.

Замечание. По утверждению выше, если граф связен, то между любыми двумя его вершинами есть путь.

Определение. Связный подграф[2], такой, что никакая вершина не из этого подграфа не соединена с ним, называется *компонентой связности*.

[1] Дружеский совет: лучше рисовать картинки, пока они тут не появились

[2] Здесь имеется ввиду т.н. *индуцированный подграф*: множество его вершин является некоторым подмножеством вершин исходного графа, а ребро между ними есть, если оно есть в исходном графе

Утверждение. Любой граф есть объединение (непересекающихся) компонент связности.

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь вершину графа A и рассмотрим множество всех вершин, в которые можно попасть из A. Тогда докажем, что соответствующий подграф является компонентой связности, содержащей A.

Для этого, исходя из определения, нужно проверить, что этот подграф связен и что из любой другой вершины нельзя добраться до этого подграфа.

Связность очевидна: для любых вершин B и C из B можно попасть в C, пройдя через A (если одна из вершин совпадает с A, то утверждение становится еще более очевидным).

Второе условие также легко проверяется: если из какой-то вершины можно добраться до нашего подграфа, то тогда из этой вершины можно добраться и до вершины A, а значит, в исходную вершину можно было попасть из A и она принадлежит нашему подграфу.

Теперь выкинем эту компоненту связности из нашего графа. Если ничего не осталось, то утверждение доказано. Если же остались какие-нибудь вершины, то повторим эту операцию еще раз. Так как количество вершин в графе конечно, то рано или поздно процесс закончиться. ■

Деревья

Определение. Связный граф без циклов называется *деревом*. Граф без циклов (не обязательно связный) называется *лесом*.

Определение. В графе вершина степени 1 называется *висячей*, вершина степени 0 называется *изолированной*.

Утверждение. В любом дереве, в котором хотя бы две вершины, есть висячая вершина.

Доказательство. Возьмем любую вершину и ребро, выходящее из нее. Пройдем по этому ребру.

Если вершина, в которую мы попали степени 1, то мы нашли висячую вершину. Если нет, то ее степень хотя бы 2 и существует еще хотя бы одно ребро (отличное от того, по которому мы пришли). Пройдем по этому ребру.

Если вершина, в которую мы попали степени 1, то мы нашли висячую вершину. Если нет, то ее степень хотя бы 2 и существует еще хотя бы одно ребро (отличное от того, по которому мы пришли). Пройдем по этому ребру.

И так далее. Заметим, что так как в нашем графе нет циклов, то мы всегда будем приходить в ту вершину, в которой еще не были. Так как граф конечен, то рано или поздно нам придется прекратить добавлять новые вершины и остановиться. Остановиться мы можем только в висячей вершине. ■

Упражнение. Докажите, что в любом дереве, в котором хотя бы две вершины, есть хотя бы две висячие вершины.

Утверждение. В любом дереве на n вершинах ровно $n-1$ ребро.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$ — очевидно.

Переход. $n = k \longrightarrow n = k+1$.

Предположение индукции. В любом дереве на k вершинах ровно $k-1$ ребро.

Рассмотрим дерево на $k+1$–ой вершине. Хочется убрать любую вершину и применить предположение индукции. Но не тут то было, посколько достаточно легко построить пример дерева такого, что при выкидывании из него некоторой вершины то, что остается, не является деревом.

Поэтому давайте выкидывать не абы какую вершину, а висячую (благо она есть по предыдущему утверждению).

Останется граф на k вершинах. И нам надо проверить, что он является деревом. Очевидно, что циклов появится не могло, поэтому нам необходимо только проверить связность.

Возьмем произвольные две вершины из оставшегося графа. По условию, до выкидывания вершины, граф был деревом, а значит связным графом, и между между выбранными вершинами был простой путь.

Мог ли этот путь проходить через выкинутую вершину? Очевидно, нет, так как тогда единственное инцидентное этой вершине ребро повторится в этом пути дважды (притом подряд). Значит, этот путь остался и граф связен.

Тогда это дерево на k вершинах и в нем, по предположению индуции, ровно $k-1$ ребро. Вернем выкинутую вершину. Вместе с ней вернется ровно одно ребро, и ребер станет k. Переход доказан. ■

Определение. Подграф, содержащий все вершины связного графа и являющийся деревом, называется *остовным деревом (остовом, скелетом).*

Утверждение. В любом связном графе есть остовное дерево.

Доказательство. На самом деле нам надо доказать, что мы можем выкинуть из нашего графа несколько ребер так, чтобы оставшийся граф был деревом.

Посмотрим на наш граф. Если он уже дерево, то делать нечего. Пусть он не дерево, но он связен. Значит в нем есть цикл, а значит и простой цикл.

Выкинем любое ребро из этого цикла и докажем, что оставшийся граф все еще связен.

Рассмотрим любые две вершины нашего графа и докажем, что между ними есть маршрут. Заметим, что до выкидывания наш граф был связен и значит между этими двумя вершинами был простой путь. Если не содержит выкинутого ребра, то он остался и мы нашли маршрут. Предположим, что содержит. Пусть ребро соединяло вершины a и b. Тогда заменим в этом пути ребро ab на путь из a в b, идущий по оставшимся ребрам цикла. Тогда мы получим маршрут, не содержащий выкинутого ребра.

Значит, оставшийся граф связен. Будем продолжать так действовать пока можем. Процесс закончится, так как количество ребер в графе конечно, а каждый раз их количество уменьшается хотя бы на 1. Остановиться мы можем только на дереве. ■

Следствие. В любом связном графе на n вершинах хотя бы $n-1$ ребро.

Задача. Докажите, что из любого связного графа можно удалить вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы граф остался связным.

Эйлеровость

Определение. *Эйлеров путь* в графе — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров цикл в графе — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам. Все рассуждения подразумевают возможность наличия кратных ребер и петель.

Теорема. Пусть в графе нет изолированных вершин.

a) Эйлеров цикл в графе существует тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин четны.

b) Эйлеров путь в графе существует тогда и только тогда, когда он связен и в нем не более двух вершин нечетной степени.

Доказательство. a) $\Rightarrow$: Связность очевидна, поскольку если в графе нет вершин степени 0, то эйлеров цикл проходит через все вершины.

Каждый раз, проходя через вершину v, эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому степень v четна.

$\Leftarrow$: Пусть степени всех вершин четны.

Докажем утверждение индукцией по количеству вершин и ребер в графе. Разрешим граф, состоящий ровно из одной изолированной вершины.

База: одна изолированная вершина.

Переход: от всех меньших к следующему. *Предположим*, что для любого графа, в котором или вершин, или ребер меньше чем в нашем, утверждение доказано.

Начнем путь в произвольной вершине a и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно. Степень вершины v после выхода из нее стала нечетной, за каждый проход пути через какую-либо вершину ее степень уменьшается на 2, четность степени при этом не изменяется. Таким образом, наш путь окончится именно в начальной вершине a, тем самым получится цикл.

После удаления всех ребер найденного цикла образовалось несколько компонент связности, степени всех вершин в каждой из которых четны. По предположению индукции, в каждой из компонент связности есть эйлеров цикл (возможно, пустой, если компонента связности — изолированная вершина).

Поскольку исходный граф связен, то для каждой компоненты связности существует вершина, лежащая на первоначальном цикле. Тогда по этой вершине несложно состыковать первоначальный цикл и эйлеров цикл этой компоненты связности в один. Проделав такую операцию последовательно для всех компонент связности, мы получим эйлеров цикл в исходном графе.

b) $\Rightarrow$ Пусть эйлеров путь имеет концы a и b. Каждый раз, проходя через вершину v, эйлеров путь проходит по двум ребрам, поэтому в случае $a = b$ степени всех вершин четны, а при $a \neq b$ в графе ровно две вершины нечетной степени — концы пути a и b.

$\Leftarrow$ Количество вершин нечетной степени в графе четно. Если их нет, то в графе есть эйлеров цикл, который является и эйлеровым путем.

Пусть в графе ровно две вершины нечетной степени a и b. Соеденим их ребром (возможно, еще одним). Тогда все вершины в графе станут четной степени и, по пункту a), в нем будет эйлеров цикл. Разорвав этот цикл по добавленному ребру мы получим эйлеров путь. ■

Утверждение. Если в связном графе $2k$ вершин нечетной степени, то его ребра можно разбить на k непересекающихся (по ребрам) путей.

Доказательство. Добавим в граф еще одну вершину и соеденим ее со всеми вершинами нечетной степени.

Получися граф, степени всех вершин которого четны, и, по предыдущей теореме, в нем есть эйлеров цикл.

Порвем этот цикл в тех местах, где он проходит через добавленную вершину. В результате образуется k (почему?) непересекающихся путей, содержащих все ребра исходного графа. ■