Разбор

3.1. Выведите явную формулу для C_n^k.

Ответ. $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Решение. На лекции было доказано, что C_n^k равняется количеству последовательностей длины n из 0 и 1, в которых ровно k единиц.

Первое решение. Давайте пытаться выбирать те k мест, на которых в нашей поледовательности могут стоять 1.

Первая единица может стоять на одном из n мест.

Для каждого из этих n вариантов есть $n-1$ вариант, где может стоять вторая единица. Таким образом выбрать первые две единицы есть $n(n-1)$ вариантов.

Для каждого из этих $n(n-1)$ вариантов есть $n-2$ варианта, где может стоять третья единица. Таким образом выбрать первые три единицы есть $n(n-1)(n-2)$ вариантов. И так далее.

Получается, что выбрать последовательно k мест для единиц есть $n(n-1)\dots(n-k+1)$ вариант.

Однако каждый вариант мы посчитали далеко не один раз. Например, для $k=3$ и варианта $\{1,2,3\}$ порядок, в котором мы могли выбрать эти 3 места мог быть $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$ — 6 вариантов.

Теперь становится понятно, что для k мест **каждый** вариант мы посчитали $k!$ способами. Для варианта $\{a_1,\dots,a_k\}$, первым выбранным местом может быть одно из k мест. Для каждого из этих k вариантов есть $k-1$ вариант выбрать то место, которое было вторым и так далее.

Стало быть, $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Второе решение. Давайте считать, для начала, что у нас все нули различны и все единицы различны (то есть у нас последовательности из 0_1, 0_2, $\dots$, 0_{n-k}, 1_1, 1_2, $\dots$, 1_k). Тогда количество различных последовательной из (различных) 0 и 1 будет равно $n!$ (на первое место — любую из n цифр, для каждого варианта первой цифры на второе — любую из $n-1$ оставшихся и так далее).

Давайте для улучшения понимая выпишем все эти варианты на доску. После этого давайте сотрем все индексы у нулей. Тогда **каждая** из оставшихся последовательностей будет написана $(n-k)!$ раз (поскольку именно столько способов для одной последовательности написать индексы у нулей). Поэтому различных вариантов на доске останется $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Сотрем некоторые варианты так, что каждый вариант присутствовал ровно один раз.

Теперь сотрем индексы у всех единиц. Тогда каждый вариант окажется написан на доске $k!$ раз (так как именно столько у нас есть способов для варианта приписать индексы единицам). Поэтому различных вариантов на доске останется $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Замечание. Некоторым это решение должно напомнить, как мы переставляли буквы в словах. Так оно и есть: мы переставляет "буквы"-цифры в слове $00\dots011\dots1$ ($n-k$ нулей, k единиц).

3.2. *Номером* будем называть произвольную последовательность цифр (в отличие от числа, номер может начинаться на 0). Сколько существует шестизначных номеров, у которых ровно три цифры чётные?

Ответ. $C_6^3 \cdot 5^6$. Решение. Для начала выберем те 3 места, на которых у нас будут стоять четные цифры. Это можно сделать C_6^3 способами.

Для каждого из этих способов есть 5^6 вариантов записать номер, у которого четные цифры будут именно на этих местах: на каждом месте может стоять одна из 5 цифр.

3.3. На плоскости лежат несколько прямых, разбивающих ее на части. Докажите по индукции, что эти части можно закрасить в 2 цвета правильным образом, то есть так, чтобы любые две части, граничащие по отрезку, были закрашены в разные цвета.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по числу прямых.

База. $n=0$.

Если прямых нет, то красим плоскоть в один цвет и тогда любые две части, граничащие по отрезку, будут закрашены в разные цвета, поскольку попросту нет частей, граничащих по отрезку.[1]

Переход. $n=k \longrightarrow n=k+1$.

[1] Почему в поездах стоп-краны красные, а в самолетах — голубые?

Предположение индукции: Если на плоскости лежат k прямых, то части, на которые они разбивают плоскость, можно закрасить в 2 цвета правильным образом.

У нас есть $k+1$ прямая на плоскости. Давайте уберем одну из прямых. Тогда на плоскости останется k прямых и мы можем применить предположение индукции. Закрасим части на которые эти k прямых разбивают плоскость правильным образом.

Теперь вспомним об убраной, $k+1$–ой, прямой. Она поделит плоскость на две полуплоскости. Давайте в одной из полуплоскостей изменим все цвета на противоположные.

Теперь надо проверить, что получившаяся раскраска является правильной. Для этого рассмотрим два случая: если части граничат по отрезку, не лежащему на $k+1$–ой прямой, или по отрезку, на ней лежащему.

В первом случае части будут разного цвета, так как они были разного цвета до добавления $k+1$–ой прямой, после добавления и после перекрашивания. Во втором случае, так как после добавления $k+1$–ой прямой, но до перекрашивания эти части были одного цвета, а потом мы изменили цвет в одной из частей. Переход доказан.[2]

3.4. С помощью бинома Ньютона докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Решение. По биному Ньютона

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n.$$

3.10. В Математической стране n городов. Любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться до любого другого.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$ — очевидно.

Переход. $n = k \longrightarrow n = k+1$.

Предположение индукции. Если в стране k городов и любые два города соединены дорогой с односторонним движением, то найдётся город, из которого можно добраться до любого другого.

У нас есть страна с $k+1$ городом. Давайте временно забудем об одном из городов, назовем его A. Тогда останется страна с k городами, в которой любые два соединены дорогой с односторонним движением. По предположению индукции среди этих k городов найдется такой город B, что из него можно попасть по все оставшиеся $k-1$.

Теперь вспомним о городе A.

Если дорога между A и B ведет из B в A, то тогда из B можно попасть во все города (в A по этой дороге, в оставшиеся — по выбору города B).

Если же дорога между A и B ведет из A в B, то тогда из A можно попасть во все города (в начале в B, а потом из B в любой другой). Переход доказан.

[2]Дружеский совет: нарисуйте картинку.