Отображения

Основные определения

Определение. *Отображением* f из множества A в множество B называется правило, согласно которому каждому элементу a из множества A ставится в соответствие единственный элемент b из множества B.

Обозначения. $f\colon A \longrightarrow B$ и $f(a) = b$. Элемент b называется *образом* элемента a, элемента a является *прообразом* элемента b при отображении f.

Пример. Множество учеников и множество стульев.

Давайте сопоставим каждому ученику стул, на котором он сидит. Заметим, что если кто-то сидит на двух стульях или вообще не сидит ни на одном стуле, то наше сопоставление не будет отображением. Отметим, что так же остались стулья, на которых никто не сидит, но это не противоречит определению отображения.

Пример. (**отображение множества в себя)**

Сопоставим каждому натуральному числу, большего 1, его наименьший делитель отличный от 1. Тогда числу никакое число не сопоставиться числу 6, а число 3 будет сопоставлено бесконечно большому множеству чисел.

Определение. Отображение $f\colon A \longrightarrow B$ называется *биекцией* или *взаимно однозначным соответствием* множеств A и B, если выполнены следующие два условия:

- для любых двух элементов a_1, $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ верно, что $f(a_1) \neq f(a_2)$;
- для любого элемента $b \in B$ существует элемент a такой, что $f(a) = b$.

Замечание. Первое свойство означает, что разные элементы при отображении переходят в разные, а второе — что в каждый элемент что-то да перешло.

Замечание. Наконец-то мы дали строго определение взаимно однозначного соответствия. Легко проверить, что если множества A и B конечны и между ними есть биекция, то $|A| = |B|$ (для этого достаточно воспользоваться пару раз принципом Дирихле). Учитывая определение, теперь мы знаем, что именно нужно проверять для того, чтобы доказать, что что-то является взаимно однозначным соответствием.

Пример. Множество окружностей на плоскости и множество пар (A, r), где A — точка на плоскости, r — действительное число, большее 0.

Пример. Множество положительных рациональных чисел и множество упорядоченных пар натуральных чисел $(m, n) = 1$.

Пример. 1. Отображение $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такое, что $f(x) = 2x$, не является биекцией.

2. Отображение $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такое, что $f(x) = [x/2] + 1$, где $[x/2]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее $x/2$, не является биекцией.

Теорема. Пусть задано отображение $f\colon A \longrightarrow B$, где A и B конечные множества и $|A| = |B| = n$. Тогда f является биекцией если выполнено хотя бы одно из свойств в определении биекции.

Доказательство. Пусть $|A| = n$ и выполнено второе свойство. Предположим противное и f не является биекцией. Тогда не выпоняется первое свойство и существуют два элемента a_1, $a_2 \in A$ такие, что $a_1 \neq a_2$, но $f(a_1) = f(a_2) = b \in B$. Тогда оставшиеся $n - 2$ элемента множества A могут перейти не более чем в $n - 2$ различных элемента множества B. Следовательно, найдётся такой элемент множества B, в который ничего не перешло, противоречие.

Второй случай рассматривается аналогично. ■

Определение. Пусть отображение $f\colon A \longrightarrow B$ является биекцией.

Определим *обратное отображение* f^{-1} из множества B в множество A по правилу $f^{-1}(b) = a$, если $f(a) = b$.

Из свойств биекции следует, что обратное отображение определено (то есть любому $b \in B$ что-то сопоставится), а во вторых определено корректно (то есть ни одному элементу из B не сопоставляется два элемента из A).

Легко проверить, что обратное отображение также является биекцией.

Упражнение. Проверить это.