Разбор

4.1. Найдите, пожалуйста, количество способов разбить 16 человек на пары.

Ответ. $\dfrac{16!}{2^8 \cdot 8!}$. Решение. *Первое решение.* Давайте выберем первую пару. Это можно сделать C_{16}^2 способами.

Для каждого из этих способов есть C_{14}^2 способов выбрать вторую пару. Стало быть, выбрать первые две пары есть $C_{16}^2 \cdot C_{14}^2$ способа. И так далее.

Выбрать последовательно 8 пар есть $C_{16}^2 \cdot C_{14}^2 \cdot \ldots \cdot C_2^2 = \dfrac{16 \cdot 15}{2} \cdot \dfrac{14 \cdot 12}{2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2 \cdot 1}{2} = \dfrac{16!}{2^8}$ способов.

Аналогично решению задачи 3.1 вариант $\{a_1, \ldots, a_8\}$ разбиения на пары мы посчитали 8! раз..

Второе решение. Давайте расставим всех людей по порядку и в первую пару отправим первых двух людей, во вторую — следующих двоих и так далее. Расставить людей по порядку есть 16! способов.

Из-за чего в таком решении мы посчитаем один и тот же вариант несколькими способами? Во-первых, потому что если мы поменяем двух человек местами в одной паре, то от этого разбиение не изменится. Поэтому надо 16! поделить на 2^8 (по одной двойке на каждую пару).

Во-вторых, если мы теперь переставим пары местами, то разбиение также не изменится. Переставить 8 пар местами есть 8! способов. Поэтому $16!/2^8$ надо поделить еще и на 8!. Теперь каждый вариант мы посчитали ровно один раз.

***План** третьего решения.* Давайте выберем из 16 человек каких-то 8. Это можно сделать C_{16}^8 способами. После этого для каждого из этих вариантов есть 8! способов поставить в соответствие каждому человеку из выбранных кого-то одного из оставшихся. Таким образом у нас получается $C_{16}^8 \cdot 8!$ способов.

Но заметим, что каждый вариант мы посчитали 2^8 раз, так как мы можем для каждой пары или поменять в ней двух человек местами (то есть выбрать в первоначальное множество из 8 человек не самого человека, а его партнера, от этого разбиение не изменится), или не поменять.

Стало быть ответ $\dfrac{C_{16}^8 \cdot 8!}{2^8} = \dfrac{\frac{16!}{8! \cdot 8!} \cdot 8!}{2^8} = \dfrac{16!}{2^8 \cdot 8!}$.

4.2. Докажите алгебраически (т.е. используя формулу), что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Решение.

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

4.3. В графе на n вершинах степень каждой вершины не превосходит 9. Докажите, что его вершины можно покрасить в 10 цветов правильным образом, то есть так, чтобы вершины, соединенные ребром, были разного цвета.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$ — очевидно (уж одну то вершину мы точно покрасим).

Переход. $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. Если в графе на k вершинах степень каждой вершины не превосходит 9, то его вершины можно покрасить в 10 цветов правильным образом.

Рассмотрим граф на $k + 1$–ой вершине, степень каждой из вершин которого не превосходит 9. Выберем какую-нибудь вершину и забудем о ней. Тогда в оставшемся графе будет k вершин и степень каждой не превосходит 9. Тогда, по предположению индукции их можно покрасить в 10 цветов правильным образом.

Вспомним о забытой, $k + 1$–ой, вершине. Ее степень не превосходит 9, значит среди вершин, с которыми она соединена, не более 9 цветов. Значит, существует цвет, которого среди них нет. Покрасим эту вершину в этот цвет. Очевидно, что получившаяся раскраска — правильная. Переход доказан.

4.4. Докажите во славу Ньютона и бинома: $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Решение.

$$0^n = (1 + (-1))^n = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n$$

Замечание. Также смотри решение задачи 2.7.

4.5. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

Ответ. Да. Решение. *Первое решение.* Доказательство будем вести индукцией по числу городов.

База. $n = 1$ — очевидно.

Переход. $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. Если в государстве k городов и каждый соединен с каждым дорогой, то можно ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться.

Рассмотрим ситуацию с $k + 1$ городом. Временно забудем об одном из городов. Тогда останется k городов и по предположению индукции на дорогах можно будет ввести одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города в него нельзы было вернуться.

Вспомним о $k + 1$–ом городе. На всех дорогах, ведущих из него введем односторонне движение так, что все дороги ведут из него.

Легко проверить (это надо сделать!), что получившаяся ориентация подходит. Переход доказан.

Второе решение. Пронумеруем вершины от 1 до n и для городов k и l, $k < l$, ориентацию на дороге введем из k в l.

Тогда, катаясь по городам, мы всегда будем увеличивать номер города, в котором мы находимся, поэтому вернуться не сможем.

4.7. Число *выглядит как простое*, если оно составное, но не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. (Пример такого числа — 91.) Среди чисел от 1 до 1000 имеется 168 простых. А сколько натуральных чисел, не превосходящих 1000, выглядят как простые?

Ответ. 100. Решение. Давайте мы будет считать не те числа, которые нам подходят, а те из них, которые нам не подходят.

Для начала посчитаем, сколько существует **составных** чисел, которые делятся или на 2, или на 3, или на 5. Аналогично решению задачи 1.2b) таких чисел будет $499+332+199-166-66-100+33 = 731$ (так как мы считаем составные числа, то вместо 500 у нас 499, вместо 333 — 332, вместо 200 — 199).

Учитывая, что 1 не является ни простым, ни составным числом, а также тот факт, что простых чисел от 1 до 1000 у нас 168 получаем, что всего нам не подходят $731 + 1 + 168 = 900$ чисел, поэтому оставшиеся 100 подходят.

4.8. Сколькими способами хромая ладья может дойти с поля a1 до поля h8, не побывав на поле e6? (хромая ладья ходит на одну клетку вправо или вверх)

Ответ. $C_{14}^7 - C_9^4 \cdot C_5^3$. Решение. Давайте для начала вспомним, сколько всего есть способов добраться из клетки a1 в клетку h8. Заметим, что нам нужно сделать 7 ходов вверх и 7 ходов вправо, то есть всего 14 ходов. Стало быть у нас есть C_{14}^7 способов это сделать (надо из 14 ходов выбрать те 7, когда мы будем ходить вправо).

А теперь посчитаем, сколько из этих путей проходят через e6. Любой путь, проходящий через e6 делится на 2 части: в начале мы идем до e6, на это у нас по аналогичным соображениям есть C_9^4 способов, а потом идем из e6 в h8, на это у нас C_5^3 способа. Поэтому всего способов у нас $C_9^4 \cdot C_5^3$. Если они нам не подходят, то надо их вычесть.

4.9. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Запомните эту формулу.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Переход. $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Нам надо что-то доказать про $1^2 + 2^2 + \ldots + (k+1)^2$, а знаем мы что-то про $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$. Это должно наводить на мысль о следующих действиях:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2 &= 1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = \\
&= (k+1)\left(\frac{2k^2+k}{6}+(k+1)\right) = (k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6} = \\
&= (k+1)\frac{2k^2+4k+3k+6}{6} = (k+1)\frac{2k(k+2)+3(k+2)}{6} = \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Первое равенство — здравый смысл, второе — предположение индукции, все остальные — результат преобразований. Переход доказан.

Замечание. На самом деле мы знали, что должно получится в конце, поэтому некоторые действия в преобразованиях взяты не с потолка, а были сделаны с целью получить конкретное выражение в конце.