Разбор

5.1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга a) три ладьи; b) двух королей?

Ответ. a) $\dfrac{64\cdot 49\cdot 36}{3!}$; b) $\dfrac{4\cdot 60+24\cdot 58+36\cdot 55}{2}$. Решение. a) Поставить первую ладью есть 64 способа. Для каждого из этих 64 способов есть 49 способов поставить вторую ладью (так как у нас есть 7 строк и 7 столбцов, на которые мы можем поставить). Аналогично, поставить третью ладью у нас есть 36 способов. Таким образом, поставить последовательно 3 ладьи есть $64\cdot 49\cdot 36$ способов.

Если мы теперь возьмем вариант расстановки ладей на места a, b, c, то существует 3! в каком порядке мы могли их выбирать (первым одно из трех мест, вторым — одно из двух оставшихся). Поэтому каждый вариант мы посчитали 3! способами, откуда и следует ответ.

b) Интерес этой задачи в том, что не для каждого из 64 вариантов поставить первого короля одинаковое количество способов поставить второго.

Если мы поставим первого короля в угол, то у нас будет 60 вариантов поставить второго короля. Если на край, но не в угол, то 58. Если не на край, то 55. Таким образом поставить последовательно двух королей есть $4\cdot 60+24\cdot 58+36\cdot 55$ вариантов.

Заметим, что каждый вариант мы посчитали дважды, откуда и следует ответ.

5.2. В маленьком приходе графства Липшир всего 5 усадеб, некоторые из них соединены дорогами. Известно, что любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся три усадьбы, никакие две из которых не соединены дорогой.

Решение. Если дорог нет вообще, то утвереждение задачи очевидно. Иначе рассмотрим какую-нибудь дорогу, соедияющую усадьбы A и B. Тогда любая оставшаяся дорога имеет один из концов или A или B, а значит между оставшимися тремя усадьбами дорог нет.

5.3. Докажите по индукции, что для любого натурального $n>1$ выполнено равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}.$$

Решение. *Первое решение.* Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n=2$: $\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{2-1}{2}$.

Переход. $n=k\longrightarrow n=k+1$.

Предположение индукции. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(k-1)\cdot k}=\dfrac{k-1}{k}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)\cdot k}+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\\ &= \frac{k-1}{k}+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k^2-1+1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}.\end{aligned}$$

Первое равенство — здравый смысл, второе — предположение индукции, все остальные — результат преобразований. Переход доказан.

Второе решение.[1] Заметим, что $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$. Тогда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

5.4. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что тогда при любом натуральном n число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ — тоже целое.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n, притом не только для натуральных чисел, а для натуральных и нуля.

[1] Да-да, не по индукции, но решение же классное.

База. $n=0$, $n=1$: $x^0+\frac{1}{x^0}=1+1=2$, $n=1$ — очевидно из условия.

Переход. $n=k-1$, $n=k\longrightarrow n=k+1$.

Предположение индукции. $x^{k-1}+\dfrac{1}{x^{k-1}}$, $x^k+\dfrac{1}{x^k}$ — целые числа.

Заметим, что

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right),$$

по условию и по предположению индукции все числа в правой части — целые, а значит и число в левой части целое. Переход доказан.

Замечание. Поскольку мы опираемся на два предыдущих утверждения, то и база должна состоять из двух чисел (поскольку иначе мы не сможем сделать уже первый переход)[2].

5.8. На плоскости нарисованы несколько окружностей, причем любые две пересекаются. Докажите, что их можно было нарисовать не отрывая карандаш от бумаги (рисовать линию дважды нельзя).

Решение. Доказательство будем вести индукцией по числу окружностей.

База. $n=1$: очевидно, одну окружность мы точно сможем нарисовать.

Переход. $n=k\longrightarrow n=k+1$.

Предположение индукции. Если на плоскости нарисованы k окружностей, причем любые две пересекаются, то их можно было нарисовать не отрывая карандаш от бумаги.

Выкинем одну окружность. Для оставшихся все еще выполняется условие о том, что любые две пересекаются. Тогда их можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги (по предположению индукции). Вернем $k+1$–ую окружность. Как только в нашем рисовании встречается эта окружность, рисуем ее, и продолжаем рисовать дальше. Переход доказан.

[2]Попробуйте сделать переход от 1 к 2, при условии, что вы не знаете, что утверждение верно и для $n=0$.