Разбор

6.1. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

Ответ. $9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9!$. Решение. Заметим, что всего 10-значных чисел $9 \cdot 10^9$ (на первое место ...).

Посчитаем количество чисел, в которых нет двух одинаковых цифр. Иными словами, в которых все цифры различны. Легко понять, что их $9 \cdot 9!$ (на первое место ...), откуда и следует ответ.

6.2. *Последовательность Фибоначчи* задается следующим образом: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и для любого натурального n выполнено $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Докажите, что для любого натурального n выполнено $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$: Для начала заметим, что $F_2 = F_1 + F_0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$. Теперь база очевидна: $F_1 = F_3 - 1$ или $1 = 2 - 1$.

Переход. $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$.

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{k+1} = F_1 + F_2 + \ldots + F_k + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1.$$

Первое равенство — здравый смысл, второе — предположение индукции, третье — определение чисел Фибоначчи. Переход доказан.

6.3. Докажите, что в дереве, в котором хотя бы две вершины, есть хотя бы две висячие вершины.

Решение. Решение в точность повторяет доказательство утвереждения про 1 висячую вершину (см. лекции по графам), только в качестве начальной вершины нужно выбрать висячую (которая есть по доказанному утверждению).

6.10. Докажите, что количество способов разбить прямоугольник $2 \times n$ на *доминошки* (так мы называем прямоугольники 1×2) равно F_{n+1}.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n.

База. $n = 1$, $n = 2$: проверяется руками (это надо сделать!)

Переход. $n = k - 1$, $n = k \longrightarrow n = k + 1$.

Предположение индукции. Количество способов разбить прямоугольник $2 \times (k-1)$ на доминошки равно F_k, а прямоугольник $2 \times k$ — F_{k+1}.

Посмотрим на прямоугольник $2 \times (k + 1)$ (2 строки, $k + 1$ столбец). Все его разбиени делятся на две группы: в первой левую верхнюю клетку покрывает вертикальная доминошка, во второй — горизонтальная. Заметим, что во втором случае тогда и левую нижнюю клетку должна покрывать горизонтальная доминошка. [1]

Тогда в первом случае нам осталось разбить на доминошки прямоугольник $2 \times k$, а во втором $2 \times (k - 1)$. По предположению индукции первых разбиений F_{k+1}, а вторых — F_k. Стало быть всего способов $F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$. Переход доказан.

[1] Думаю, про картинку вы сами поняли.