Последняя в четверти

1. Докажите, что если степени всех вершин связного графа равны 10, то после удаления любого ребра граф останется связным.

2. Найдите коэффициент при $a^k b^l c^{n-k-l}$ после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(a+b+c)^n$.

3. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Указание: замените правую часть.

---

4. На числовой прямой в точке 0 сидит кузнечик. Он может прыгать вправо на 1 или на 2. Докажите, что количество способов добраться до точки n равно какому-то числу Фибоначчи и найдите это число (в зависимости от n).

5. a) Докажите, что из любого связного графа можно удалить вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы граф остался связным.
b) Есть связный граф на n вершинах. Докажите, что существует маршрут, содержащий все вершины, такой, что его длина не превосходит $2n-3$ и по каждому ребру он проходит не более двух раз (возможно, ноль).

6. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

7. Докажите, что любой связный граф, степени вершин которого не превосходят 2, есть либо простой цикл, либо простой путь.

8. На турнир приехали школьники из разных городов. Один из организаторов заметил, что из них можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом еще менее четверти команд будут иметь по запасному игроку. Другой предложил сделать 22 команды по 5 или по 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков. Сколько школьников приехало на турнир?

9. Известно, что $a+b+c=7$, а $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=0.7$. Чему может быть равна сумма

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ ?$$

10. Докажите, что произведение k подряд идущих натуральных чисел делится на $k!$.
