Разбор

7.1. Докажите, что если степени всех вершин связного графа равны 10, то после удаления любого ребра граф останется связным.

Решение. Предположим, что после удаления ребра граф распался на две компоненты связности.

Заметим, что концы ребра лежат в разных компонентах связности. Действительно, если это не так, то между ними есть путь. Покажем, что тогда граф остался связным. Рассмотрим любые две вершины. По условию, в исходном графе между ними был путь. Его могло не стать только изз-за того, что он проходил через выкинутое ребро. Заменив это ребро в пути на путь между ними, мы получим маршрут, соединяющий две выбранные вершины.

Итак, вершины ребра лежат в разных компонентах связности. Значит, в каждой из них ровно по одной вершине степени 9, а все остальные степени 10, противоречие с леммой о рукопожатиях.

7.2. Найдите коэффициент при $a^kb^lc^{n-k-l}$ после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(a+b+c)^n$.

Ответ. $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$. Решение.

$$(a+b+c)^n = \underbrace{(a+b+c)\cdot \ldots \cdot (a+b+c)}_{n \text{ раз}}$$

Аналогично доказательству бинома Ньютона (см. лекцию по комбинатрике) заметим, что для того, чтобы получить одночлен $a^kb^lc^{n-k-l}$ нам нужно из k скобок выбрать a, из l скобок выбрать b, а из остальных — c. Сделать это можно $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$ способами.

7.3. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2.$$

Решение. Заметим, что $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, поэтому нам достаточно доказать равенство

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Докажем его индукцией по n.

База. $n=1$: $1^3 = \dfrac{1^2 2^2}{4}$.

Переход. $n=k \longrightarrow n=k+1$.

Предположение индукции. $1^3+2^3+\ldots+k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

переход доказан.

7.4. На числовой прямой в точке 0 сидит кузнечик. Он может прыгать вправо на 1 или на 2. Докажите, что количество способов добраться до точки n равно какому-то числу Фибоначчи и найдите это число (в зависимости от n).

Решение. Обозначим через A_n количество способов кузнечику добраться до точки n. Заметим, что все варианты добраться до точки n при $n>2$ разбиваются на два типа: последний прыжок был длины 2 или блины 1. Первых по определению A_{n-2} (так как в начале кузнечик как-то добпрыгал же до точки $n-2$), вторых A_{n-1}. Таким образом, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$.

Осталось понять, что там твориться в начале ряда. Легко проверить (ну, вы поняли), что $A_1 = 1$, $A_2 = 2$. Значит, $A_1 = F_2$, $A_2 = F_3$ и видимо $A_n = F_{n+1}$. Это утверждение легко (и вам тут придется сделать это самим) доказать индукцией по n.