И вновь продолжается бой...

1. a) Докажите самостоятельно, что если $a \vdots b$ ($a \equiv b \pmod m$), то для любого натурального n выполнено $a^n \vdots b^n$ ($a^n \equiv b^n \pmod m$).
b) Найдите остаток при делении 11^{100} на 12.

2. Даны целые числа a, b и c. Известно, что $a^2 - ab + b^2$ и $b^2 + bc + c^2$ делятся на 101. Докажите, что $a^3 + c^3$ делится на 101

3. Докажите, что если у натурального числа нечетное число натуральных делителей, то оно — полный квадрат.

---

4. Докажите, что $43^{23} + 23^{43}$ делится на 66.

5. Шестизначный номер будем называть *счастливым билетом*, если сумма первых трех его цифр равна сумме последних трех. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 999999.

6. Будем говорить, что натуральное число a *загадочнее* числа b, если при делении 839 на a в остатке получается b. Докажите, что не существует 10 подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых (кроме самого меньшего из них) загадочнее предыдущего.

7. В гимназии есть несколько кружков, каждый из которых посещает не менее двух гимназистов. Оказывается, что для любых двух кружков найдутся два гимназиста, которые посещают одновременно оба этих кружка. Докажите, что на нескольких гимназистов можно вылить банку красной краски, а на других — синей так, чтобы в каждом кружке, был как красный, так и синий гимназист.

8. Докажите, что если в графе на n вершинах рёбер не меньше чем n, то в нём есть цикл.

9. На 22 карточках написали натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целое значение?

10. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Ровно треть команд хотя бы раз сыграли вничью, а ровно 75 % остальных команд не обошлись без поражений. Сколько результативных матчей было сыграно в турнире?