Разбор

8.1. а) Докажите самостоятельно, что если $a \vdots b$ ($a \equiv b \pmod{m}$), то для любого натурального n выполнено $a^n \vdots b^n$ ($a^n \equiv b^n \pmod{m}$).

Решение. Пусть $a \vdots b$, то есть $a = bx$ для некоторого целого x, возводя это равенство в степень n получаем $a^n = b^n x^n$, то есть $a^n \vdots b^n$.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, то есть $a - b \vdots m$, тогда $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}) \vdots m$, то есть $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

8.1. b) Найдите остаток при делении 11^{100} на 12.

Ответ. 1. Решение. $11^{100} \underset{12}{\equiv} (-1)^{100} \underset{12}{\equiv} 1$.

8.2. Даны целые числа a, b и c. Известно, что $a^2 - ab + b^2$ и $b^2 + bc + c^2$ делятся на 101. Докажите, что $a^3 + c^3$ делится на 101

Решение. $a^3 + c^3 = (a^3 + b^3) - (b^3 - c^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (b-c)(b^2 + bc + c^2)$.

8.3. Докажите, что если у натурального числа нечетное число натуральных делителей, то оно — полный квадрат.

Решение. Пусть исходное число n. Разобьем его делители на пары вида d и n/d (то есть такие, которые в произведении дают число n). Так как делителей нечетно, то в какой-то паре числа совпали, т.е. $d = n/d$ и $n = d^2$.

На этом решение заканчивается, но давайте заметим, что если число — полный квадрат, то числа могли совпасть только в одной паре и поэтому у полного квадрата нечетное число делителей.

8.4. Докажите, что $43^{23} + 23^{43}$ делится на 66.

Решение. *Первое решение, бездумное.* Т.к. $43 \underset{66}{\equiv} -23$, то $43^{23} + 23^{43} \underset{66}{\equiv} 23^{43} - 23^{23} \underset{66}{\equiv} 23^{23} \cdot (23^{20} - 1)$. Осталось понять, делится ли $23^{20} - 1$ на 66. Давайте просто попытаемся посчитать остаток 23^{20} при делении на 66: $23^1 \underset{66}{\equiv} 23$, $23^2 = 529 \underset{66}{\equiv} 1$. Возводя последнее сравнение в 10-ую степень, получаем $23^{20} \underset{66}{\equiv} 1$, что и требовалось.

Решение второе, чуть более идейное. Для того, чтобы доказать, что число делится на 66 достаточно доказать, что оно делится на 2, на 3 и на 11 (так как они попарно взаимно просты). Тот факт, что $43^{23} + 23^{43} \vdots 2$ очевиден. Посмотрим на наше выражение по модулю 3: $43^{23} + 23^{43} \underset{3}{\equiv} 1^{23} + (-1)^{43} \underset{3}{\equiv} 0$. Аналогично, $43^{23} + 23^{43} \underset{11}{\equiv} (-1)^{23} + 1^{43} \underset{11}{\equiv} 0$.

8.5. Будем говорить, что натуральное число a *загадочнее* числа b, если при делении 839 на a в остатке получается b. Докажите, что не существует 10 подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых (кроме самого меньшего из них) загадочнее предыдущего.

Решение. Давайте просто запишем условие, что $a+1$ загадочнее a:

$$839 = (a+1)q + a = (a+1)(q+1) - 1 \text{ или } 840 = (a+1)(n+1),\ 840 \vdots a+1.$$

Значит, если такие числа существуют, то 840 делится на 9 подряд идущих натуральных чисел, что неверно, поскольку среди 9 подряд идущих натуральных чисел есть число, которое делится на 9, а 840 на 9 не делится.