

Выданная 2.11 дня 1.11 месяца 183.11 года

1. а) Для каких натуральных n число C_n^2 — четное? б) А сумма чисел от 1 до n ?
 2. Докажите, что количество счастливых билетов делится на 2.
 3. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 102, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102.
-

4. Чему может быть равно $(2n + 3, 7n + 6)$?
5. В доме 1000 комнат с номерами $1, \dots, 1000$. Изначально все двери закрыты. Ночью 1000 призраков летают по дому и открывают дверь, если она закрыта, либо закрывают ее, если она открыта. Известно, что k -тый призрак подлетает к каждой двери с номером, кратным k , причем только один раз. Сколько дверем будет открыто утром?
6. Что больше: 2^{300} или 3^{200} ?
7. Шестизначный номер будем называть *билетом, счастливым по-ленинградски*, если сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных местах.
 - а) Докажите, что количество счастливых билетов и количество билетов, счастливых по-ленинградски, совпадают.
 - б) Докажите, что количество счастливых билетов меньше 90910.*Указание. Что можно сказать про числа, у которых сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных?*
8. Докажите, что для любых натуральных n и k выполнено равенство

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k.$$

9. Куб $11 \times 11 \times 11$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Сколько существует путей из углового кубика в противоположный? (За шаг разрешается сдвигаться вправо, вверх или “вглубь” на 1 кубик.)
10. Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc , и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?