Разбор

9.1. a) Для каких натуральных n число C_n^2 — четное? b) А сумма чисел от 1 до n?

Ответ. a) $n \underset{4}{\equiv} 0, 1$; b) $n \underset{4}{\equiv} 0, 3$. Решение. a) Заметим, что $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Если $n(n-1)/2 \vdots 2$, то $n(n-1) \vdots 4$, значит нас интересует только остаток n при делении на 4. Если $n \underset{4}{\equiv} 0$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 0$, если $n \underset{4}{\equiv} 1$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 0$, если $n \underset{4}{\equiv} 2$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 2$, если $n \underset{4}{\equiv} 3$, то $n(n-1) \underset{4}{\equiv} 2$. Пункт b) решается аналогично, так как $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

9.2. Докажите, что количество счастливых билетов делится на 2.

Решение. Заметим, что счастливые билеты разбиваются на пары вида $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ и $\overline{(9-a_1)(9-a_a)(9-a_3)(9-a_4)(9-a_5)(9-a_6)}$. (По другому — на номера с суммой 999999.)

9.3. Приведите пример трехзначного числа, которое не делится на 102, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 102. Поясните, почему вы считаете, что оно делится на 102.

Ответ. Например, 340. Решение. Заметим, что 340 не делится на 102. Далее, заметим, что число $\underbrace{340\ldots340}_{15\text{ раз}} = 340 \cdot \underbrace{1001\ldots001}_{15\text{ единиц}}$. Заметим, что это число является произведение числа, кратного 34 и числа, кратного 3, значит оно делится на $34 \cdot 3 = 102$.

9.4. Чему может быть равно $(2n+3, 7n+6)$?

Ответ. 1, 3, 9. Решение. По алгоритму Евклида $d = (2n+3, 7n+6) = (2n+3, n-3) = (9, n-3)$. Значит, $9 \vdots d$ и d не может быть равно ничему, кроме 1, 3, 9. Для того, чтобы доказать, что все эти ответы могут быть, достаточно взять $n-3 = 1$, 3, 9 или $n = 4$, 6, 12 соответственно.

9.5. В доме 1000 комнат с номерами 1, …, 1000. Изначально все двери закрыты. Ночью 1000 призраков летают по дому и открывают дверь, если она закрыта, либо закрывают ее, если она открыта. Известно, что k-тый призрак подлетает к каждой двери с номером, кратным k, причем только один раз. Сколько дверем будет открыто утром?

Ответ. 31. Решение. Заметим, что к каждой двери подлетает столько призраков, сколько делителей имеет номер этой двери. Для того, чтобы утром дверь была открыта, к ней должно подлететь нечетное число призраков (почему?). Значит, по задаче 8.3. ответом будет количество полных квадратов, не превосходящих 1000. Заметим, что $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$, откуда и получаем ответ.

9.10. Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

Официальное решение (олимпиада им. Эйлера 2013, региональный этап)

Ответ. Не могло. Решение. Предположим противное: произведения ab, bc и ca оканчиваются, соответственно, двузначными числами n, $n+1$ и $n+2$. Среди этих трёх последовательных чисел обязательно найдется нечётное, значит, произведение каких-то двух из чисел a, b и c нечётно. Это означает, что по крайней мере два из чисел a, b и c нечётны. Но тогда третье число чётно, иначе все три произведения ab, bc, ca были бы нечётными, что невозможно.

Итак, среди произведений одно нечётное и два чётных числа, то есть число n чётно. Тогда число a чётно, а числа b и c нечётны. Теперь, если a делится на 4, то оба числа n и $n+2$ должны делиться на 4. Если же a не делится на 4, то числа n и $n+2$ также не делятся на 4. Однако из двух последовательных чисел n и $n+2$ одно обязательно делится на 4, а другое — нет. Противоречие.