

Разбор

10.1. Докажите, что граф K_5 не планарен.

РЕШЕНИЕ. Предположим, что K_5 планарен, тогда для него должно выполняться неравенство $P \leq 3B - 6$, однако это не так: $P = 5 \cdot 4/2 = 10$, $3 \cdot B - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$, $10 \not\leq 9$.

10.2. Докажите, что для каждого натурального n дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

РЕШЕНИЕ. Посмотрим на НОД числителя и знаменателя (по сути НОД — наибольшее число, на которое мы сможем сократить дробь, поэтому посмотреть на НОД логично): $(12n+1, 30n+2) = (12n+1, 30n+2 - 2(12n+1)) = (12n+1, 6n) = (1, 6n) = 1$. Значит, дробь несократима.

10.3. Найдите наибольшее девятизначное число, составленное из различных ненулевых цифр, которое делится на 45. Не забудьте пояснить, почему вам кажется, что оно наибольшее.

ОТВЕТ. 987643215. РЕШЕНИЕ. Заметим, что наше число должно делиться на 5 и на 9. Для того, чтобы оно делилось на 5, оно должно оканчиваться либо на 5, либо на 0, а поскольку наше число состоит из ненулевых цифр, оно оканчивается на 5. Заметим, что делимость на 9 выполнена автоматически: сумма цифр равна $1 + \dots + 9 = 9 \cdot 5$.

Дальше, из всех чисел наибольшим будет очевидно то, которое начинается на 9. Из всех таких чисел наибольшее то, у которого на втором месте 8 и так далее, получаем ответ.