Разбор

11.1. 2013 год — первый со времён Средневековья, в записи которого использованы четыре последовательные цифры. Сколько таких лет (до 10000 г.) ещё будет?

План решения (XLII Уральский турнир юных математиков)

Ответ. 149. Решение. Всего есть семь четвёрок последовательных цифр: от 0, 1, 2, 3 до 6, 7, 8, 9. У каждой — по 24 перестановки, всего — 168. Из них 6 перестановок начинаются с нуля, и не годятся для обозначения лет, 12 — с единицы, и эти годы уже прошли, 2013 тоже не считается. Остается $168 - 19 = 149$ лет.

11.2. Имеется 2014 подряд идущих натуральных чисел. Известно, что наибольшее из них делится на наименьшее. Каким может быть наибольшее из этих чисел? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

Ответ. 2014, 2016, 2024, 2046, 2074, 2196, 2684, 4026. Решение. Пусть исходные числа x, $x+1, \ldots,$ $x + 2013$. Тогда, по условию, $x + 2013 \vdots x$ и $2013 \vdots x$. То есть x должен быть делителем числа 2013. Заметим, что любой делитель 2013 подходит, откуда и берется ответ.

11.3. Решите в целых числах уравнение $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{y} = 7$.

План решения (XLII Уральский турнир юных математиков)

Ответ. $(\pm 2, 1), (\pm 3, 2), (\pm 4, -5)$. Решение. Приведём равенство из условия к виду $y(14 - x^2) = 10$. Видим, что y — делитель числа 10. Перебирая все делители числа 10, получаем ответ.

11.7. При каких $n > 3$ число $n!$ делится на число $(n-1)! + (n-2)! + (n-3)!$?

План решения (XLII Уральский турнир юных математиков)

Ответ. Ни при каких. Решение. Разделим обе части на $(n-3)!$. Получим $n(n-1)(n-2) \vdots$ $(n-1)(n-2) + (n-2) + 1 = (n-1)(n-2) + (n-1) = (n-1)^2$. Сократив обе части на $(n-1)$, получим, что $n(n-2) \vdots (n-1)$, чего при $n > 3$ не может быть.