КолХоз "Пятница тринадцатое"

1. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что a) $C_p^k \vdots p$, где $0 < k < p$; b) $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$.

c) **(Малая теорема Ферма)** Докажите, что для любого натурального n верно $n^p \underset{p}{\equiv} n$.

2. Каждая из девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

3. Ненулевые числа x, y и z таковы, что $x+y+z=1$ и $1/x+1/y+1/z=0$. Докажите, что $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$.

4. Натуральное n называется *избыточным*, если сумма всех его натуральных делителей, кроме него самого, больше n. Докажите, что кратное избыточного числа тоже избыточно.

5. Докажите, что $(3^n+1)^n-2$ делится на 3^n-2.

6. M — конечное множество точек на плоскости. Для каждого натурального $i \leqslant 7$ существует окружность, проходящая ровно через i точек M. Какое наименьшее количество точек может быть в M?

7. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на любое количество правильных треугольников, большее 5. (Треугольники не обязаны быть одинаковыми.)

8. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Из вершины A проведена высота AD. В треугольнике ABD проведена биссектриса BE. Докажите, что $AB+AE=BC$.

9. Несколько семиклассниц собрали поровну шишек. Время от времени какие-то семиклассницы раздают каждой из остальных поровну из своих шишек. После многократного повторения такой процедуры у Гертруды осталось 23 шишки, а у Нинели — 6 шишек. Сколько было семиклассниц?

10. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 5 разных видов, причем количество ключей разных видов различно. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах, так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев имеет дубликат ключа от одной из комнат. Докажите, что он может открыть все комнаты.