Чертова дюжина

0. Разложите 2014 на простые множители. Запомните это разложение!

1. Чему равен $(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots1}_{m \text{ единиц}})$?

Указание: алгоритм Евклида

2. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$. Докажите, что

a) $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y;

b) $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\max(x, y)$ — это наибольшее из чисел x и y;

c) $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

---

3. Может ли точный квадрат иметь поровну натуральных делителей вида $3k + 1$ и $3k + 2$?

4. Среди нескольких команд провели круговой турнир по волейболу (каждая команда сыграла с каждой по одному разу, ничьих не бывает). Команда A называется сильнее команды B, если A выиграла у B или, если есть команда C, которая выиграла у B и проиграла A. Доказать, что победитель турнира (набравший наибольшее число очков) сильнее всех.

5. Биссектриса угла A и внешняя биссектриса угла C треугольника ABC пересекаются в точке I_A. Оказалось, что $\angle I_ABC = \angle B$. Найдите угол B.

6. a и b — натуральные числа, причем число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится на 441.

7. Три числа a, b, c выбраны так, что выполнены равенства $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$. Найдите все значения, которые может принимать величина

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$
