Разбор

13.0. Разложите 2014 на простые множители. Запомните это разложение!

Ответ. $2 \cdot 19 \cdot 53$

13.1. Чему равен $(\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}}, \underbrace{11\ldots1}_{m\text{ единиц}})$?

Ответ. $\underbrace{11\ldots1}_{(n,m)\text{ единиц}}$ Решение. Пусть $n \geqslant m$. Согласно лемме из алгоритма Евклида:

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = (\underbrace{11\ldots1}_{n-m}\underbrace{00\ldots0}_{m}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = (\underbrace{11\ldots1}_{n-m}\cdot 10^m, \underbrace{11\ldots1}_{m}).$$

Заметим, что $(10^m, 11\ldots1) = 1$, поэтому 10^m можно убрать. Имеем:

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = (\underbrace{11\ldots1}_{n-m}, \underbrace{11\ldots1}_{m}).$$

Заметим, что для пары количества единиц $(n; m)$ мы проделали одну операцию алгоритма Евклида (из большего числа вычли меньшее). Продолжая таким образом, через несколько действий, количества единиц станет равно (n, m) и 0. То есть

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = \ldots = (\underbrace{11\ldots1}_{(n,m)}, 0) = \underbrace{11\ldots1}_{(n,m)}.$$

13.2. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$. Докажите, что
a) $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y;
b) $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max(\alpha_s,\beta_s)}$, где $\max(x, y)$ — это наибольшее из чисел x и y;
c) $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

Решение. а) Пусть d — общий делитель a и b. Тогда в разложение d не могут входить простые делители, отличные от $p_1, \ldots, p_s$. Действительно, пусть $d \;\vdots\; q \neq p_i$. Тогда у числа a будет два канонических представления: в одном q нет, в другом $a = d \cdot y = q \cdot xy$ — есть. Противоречие с основной теоремой арифметики. Значит $d = p_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\delta_s}$.

Аналогично можно показать, что $\delta_i \leqslant \alpha_i$ (если не так, то у a будут два канонических представления: в одном p_i в степени α_i, в другом — в степени строго большей, чем α_i). Аналогично $\delta_i \leqslant \beta_i$, значит $\delta_i \leqslant \min(\alpha_i, \beta_i)$.

Заметим, что любой набор δ_i, удовлетворяющих этому условию соответствует некоторому общему делителю a и b. Наибольшим из них, очевидно, является то, в котором δ_i максимально, то есть $\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$.

b) Аналогично, пусть $c = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\gamma_s} \cdot q_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot q_t^{\varepsilon_t}$ — общее кратное a и b. Аналогично рассуждению пункта а) можно показать, что $\gamma_i \geqslant \alpha_i$, $\gamma_i \geqslant \beta_i$, про ε_i можно только сказать, что они неотрицательны.

Значит $\gamma_i \geqslant \max(\alpha_i, \beta_i)$, $\varepsilon_i \geqslant 0$. Заметим, что любой набор γ_i, ε_i, удовлетворяющих этим условиям соответствует некоторому общему кратному этих двух чисел. Наименьшим из них является то, для которого $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$, $\varepsilon_i = 0$.

c) Следует из пунктов а) и b) и того факта, что $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ для любых x и y.

13.5. Биссектриса угла A и внешняя биссектриса угла C треугольника ABC пересекаются в точке I_A. Оказалось, что $\angle I_ABC = \angle B$. Найдите угол B.

Ответ. $60°$. Решение. Пусть D — точка, лежащая на прямой $[AB]$, по другую сторону от точки B, чем точка A.

Заметим, что I_A — центр вневписанной окружности треугольника ABC и $\angle DBI_A = \angle I_ABC = \angle B$, причем в сумме эти углы образуют развернутый угол. Значит, $\angle B = 180°/3 = 60°$.

13.6. a и b — натуральные числа, причем число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится на 441.

Решение. Заметим, что для доказательства достаточно показать, что $a^2 + b^2$ делится на 9 и на 49.

Так как $a^2 + b^2 \;\vdots\; 21$, то $a^2 + b^2 \;\vdots\; 3$. Несложный перебор показывает, что квадраты числе при делении на 3 могут давать только остатки 0 и 1. Это означает, что для того, чтобы $a^2 + b^2$ делилось на 3, каждое из слагаемых должно делится на 3. Значит, $a^2, b^2 \;\vdots\; 3$ и $a, b \;\vdots\; 3$. Значит, $a^2 + b^2 \;\vdots\; 9$.

Аналогично для 49. (Квадраты чисел при делении на 7 могут давать остатки 0, 1, 2, 4.)